

## Práctico Semana 3

### 1. Propiedades básicas de los números reales

1. Demostrar que:

a) Si  $a < b$  y  $c < d$  entonces  $a + c < b + d$ .

b) Si  $a < b$  entonces  $-b < -a$ .

c) Si  $a > 1$  entonces  $a^2 > a$ .

d) Si  $0 < a \leq b$  entonces  $a^2 \leq b^2$ .

e) Si  $a, b \geq 0$  y  $a^2 < b^2$  entonces  $a < b$ .

f) Si  $0 \leq x < y$  entonces  $x^3 \leq y^3$ .

### 2. Desigualdad triangular

Probar las siguientes desigualdades asociadas a la desigualdad triangular.

a)  $|a + b| \leq |a| + |b|$       b)  $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

c)  $|a + b| \geq |a| - |b|$       d)  $|ab| \leq a^2 + b^2$

### 3. Funciones

a) Funciones afines

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función afín, esto es  $f(x) = ax + b$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

1) Probar que si  $b = 0$  entonces para todo par  $x, z \in \mathbb{R}$  se tiene que  $f(x + z) = f(x) + f(z)$  y  $f(xy) = xf(y)$ . Mostrar que esto no es válido si  $b \neq 0$ .

2) Probar que  $f$  es biyectiva y determinar su inversa.

3) Determinar qué funciones afines conmutan con  $g(x) = x + 2$ . Repetir para  $h(x) = 2x$ .

b) Probar que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  no es invertible. Qué ocurre si consideramos la restricción a  $\mathbb{R}^+$ , es decir ¿La función  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $g(x) = x^2$  es invertible en su imagen? Se estudiará la sobreyectividad de esta función en el siguiente practico.

### 2. Inducción

1. Demostrar las siguientes igualdades usando el método de inducción completa:

a)  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$       b)  $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$       c)  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

d)  $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$       e)  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$

f)  $\sum_{i=1}^n i(i!) = (n+1)! - 1$       g)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

2. Demostrar las siguientes desigualdades usando el método de inducción completa:

$$a) (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N} \quad b) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} \quad \forall n > 1$$

$$c) n-2 < \frac{n^2-n}{12}, \quad \forall n > 10 \quad d) n^2 < 2^n, \quad \forall n > 4 \quad e) 2^n < n!, \quad \forall n > 3$$

3. a) Probar que

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \text{ para todo } x \neq 1$$

b) Probar que dados  $0 \leq x < y$  se verifican las desigualdades

$$(y-x)x^n \leq \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{n+1} \leq (y-x)y^n$$

4. Pruebe que dados  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

5. Sea  $b$  un entero positivo, entonces para cada  $n \geq 0$  existen enteros no negativos  $Q$  y  $R$  tales que:

$$n = Qb + R, \quad 0 \leq R < b.$$

6. Probar que la ecuación  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2+n+2}{2}$  cumple el paso inductivo para todo  $n$  y sin embargo la igualdad no se cumple para ningún  $n$ .

7. Sea  $A$  un subconjunto de naturales no vacío. Probar que existe  $n \in A$  tal que  $\forall m \in A$  se tiene que  $n \leq m$ .

Probar que si  $A$  es finito entonces existe  $m \in A$  tal que para todo  $n \in A$  se cumple que  $n \leq m$ . A tal número se le denomina máximo de  $A$ .

### 8. Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal, es un triángulo de números, infinito y definido por inducción.

La primer fila contiene un único número, que será 1, y luego cada fila tendrá un elemento más que la anterior.

Notaremos  $f(n, i)$  el valor del lugar  $i$  de la fila  $n$ . Para que tenga sentido debe ser  $i \leq n$ .

La definición entonces es:

- Paso base:  $f(0, 0) = 1$
- Paso inductivo:
  - $f(n+1, 0) = f(n+1, n+1) = 1$
  - Si  $1 < i < n+1$ ,  $f(n+1, i) = f(n, i) + f(n, i-1)$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & 
 \end{array}$$

Las primeras 5 filas del triángulo de Pascal

a) Probar que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} f(n, i)$$

b) Deducir que

- $\sum_{i=0}^n f(n, i) = 2^n$
- $\sum_{i=0}^n (-1)^i f(n, i) = 0$
- $f(n, i) = f(n, n-i)$

c) Se define el número combinatorio  $\binom{n}{i}$ , donde  $0 \leq i \leq n$  como  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  (recordar que  $0! = 1$ ).

Probar que

$$\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i}$$

Deducir que  $f(n, i) = \binom{n}{i}$

d) Suponga que tiene una bolsa con  $n$  bolillas distinguidas, por ejemplo numeradas del 1 al  $n$ . Probar que  $f(n, i)$  es la cantidad de maneras de tomar  $i$  bolillas de las  $n$ . Deducir que la cantidad de subconjuntos de un conjunto  $A$  de  $n$  elementos es  $2^n$ .

9. Sean  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  números reales positivos. Demostrar que

$$\min \left\{ \frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_n}{y_n} \right\} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{y_1 + \dots + y_n} \leq \max \left\{ \frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_n}{y_n} \right\}$$

### 3. Funciones naturales

1. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas

- a)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(a) = a + 1$
- b)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(a) = 3a + 1$
- c)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(a) = a^3 - 2a$
- d)  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(a, b) = a$
- e)  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(a, b) = 2^a 3^b$
- f)  $f: (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(a, b) = 2^m(2n+1)$

2. Sea  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  una función definida por recurrencia. Determinar en cada caso el valor  $f(n)$ , para un  $n$  genérico.

- a)  $f(1) = 1, f(n+1) = f(n) + 3$     b)  $f(1) = -1, f(n+1) = -f(n)$     c)  $f(1) = 2, f(n+1) = 2f(n)$
- d)  $f(1) = 1, f(n+1) = (n+1)f(n)$     e)  $f(1) = 1, f(n+1) = f(n) - n^2 + (n+1)^2$

3. Sean  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  funciones probar que si  $f(i) \leq g(i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  entonces  $\sum_i^n f(i) \leq \sum_i^n g(i)$ .

De un ejemplo de funciones  $f, g$  tal que  $\sum_i^n f(i) \leq \sum_i^n g(i)$  y sin embargo exista un  $n_0 \in \mathbb{N}$  con  $f(n_0) > g(n_0)$ .

### 3.1. Polinomios

1. Sea  $S$  un polinomio de grado  $n$ .

a) Dado  $P$  polinomio lineal ( $P(x) = ax + b$  con  $a \neq 0$ ) existen un polinomios  $Q$  y una contante  $r$  tal que

$$S = PQ + r \text{ y } \text{grado}(Q) = \text{grado}(S) - 1$$

b) Descomposición en raíces

Utilizar la parte a) para deducir que si  $\alpha$  es una raíz de  $S$  entonces  $S(x) = Q(x)(x - \alpha)$  donde  $\text{grado}(Q) = \text{grado}(S) - 1$

Concluir que si  $S$  tiene  $n$  raíces distintas entonces

$$S(x) = \alpha \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_i$  raíz de  $S$  y  $\alpha_i \neq \alpha_j$  para todo para  $i \neq j$

c) Repetir la parte a) para un polinomio  $P$  genérico, esto es, existen polinomios  $Q, R$  tal que

$$S = PQ + R, \text{ grado}(P) + \text{grado}(Q) = \text{grado}(S) \text{ y } \text{grado}(R) < \text{grado}(P)$$

2. Si bien no hay un algoritmo para calcular raíces a polinomios genéricos de grado mayor igual a 5, se puede a veces identificar algunas raíces. Por ejemplo, si el polinomio no tiene término independiente, entonces 0 es raíz.

En este ejercicio se estudiara el problema de encontrar raíces en algunos polinomios enteros. Sea  $S = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  un polinomio enteros de grado  $n$ , esto es  $a_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i$  y  $a_n \neq 0$

a) Probar que si  $n = 1$  entonces  $S$  tiene una raíz racional. Si además  $a_1 = \pm 1$  entonces la raíz es entera.

b) Probar que si  $n = 2$  entonces  $S$  no puede tener un única raíz racional simple.

c) Reproduciendo el razonamiento del ejercicio anterior probar que si  $\alpha \in \mathbb{Z}$  es una raíz de  $S$  entonces  $S(x) = Q(x)(x - \alpha)$  donde  $Q$  también es un polinomio entero. Deducir que  $\alpha$  divide a  $a_0$ .

d) Sea  $\alpha$  raíz de  $S$  tal que  $\alpha = \frac{p}{q}$  fracción irreducible, es decir  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{p^i}{q^i} = 0$ . Probar que  $p$  es raíz del polinomio  $\hat{S}(x) = \sum_{i=0}^n a_i q^{n-i} x^i$ . Deducir que  $p|a_0$  y  $q|a_n$ .

e) Deducir que si  $a_n = \pm 1$  entonces para todo  $\alpha$  raíz se cumple que  $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .

f) Calcular las raíces del polinomio  $S(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

3. Sean  $P, Q$  dos polinomios y  $k = \max\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}$ . Probar que si existen  $k+1$  puntos distintos  $x_i$  tal que  $P(x_i) = Q(x_i)$  entonces  $P = Q$

## 4. Geometría

En esta sección no se esperan pruebas con demasiada formalidad en los ejercicios, si no que se entienda los problemas geométricos y a partir de inducción completa dar algún boceto de demostración.

1. Polígonos convexos

a) Probar que los ángulos interiores de un polígono convexo de  $n$  lados suman  $(n-2)\pi$ .

b) Probar que un polígono convexo de  $n$  lados tiene  $\frac{n(n-3)}{2}$  diagonales.

2. Regla y compás

- a) Dado un segmento de longitud unidad, entonces el segmento de longitud  $\sqrt{n}$  se puede construir con regla y compás para cada entero positivo  $n$ . (Sugerencia: ver como se construye el segmento de longitud  $\sqrt{2}$ .)
- b) Probar que con regla y compás se pueden obtener todos los ángulos de la forma  $\frac{\pi}{2^n}$
3. Probar que  $n$  rectas en el plano, tales que dos cualesquiera de ellas no son paralelas y tres cualesquiera de ellas no tienen un punto en común, determinan  $1 + \frac{n(n+1)}{2}$  regiones.
4. Se tienen  $n$  circunferencias en el plano. Demostrar que se puede pintar las regiones delimitadas por las circunferencias con 2 colores, de forma que dos secciones adyacentes sean de color distinto. ¿Vale lo mismo para cuadrados?

## 5. Aplicaciones (algoritmos)

1. Torre de Hanoi.



Un rompecabezas consiste en 3 ejes con  $n$  anillos concéntricos de diámetro decreciente, todos ellos colocados en el segundo eje. Un anillo situado en una pila de anillos de un eje puede colocarse en otro eje siempre y cuando no se sitúe sobre un anillo de diámetro inferior.

Demuestre que toda pila de  $n$  anillos puede colocarse en el último eje mediante  $2^n - 1$  desplazamientos, y que esto no puede hacerse en menos desplazamientos.

2. Se desea hacer un programa que busque una palabra en un diccionario, para esto se necesitan hacer comparaciones hasta encontrarla. Dotaremos de un orden a las palabras, de forma que dadas dos palabras  $P$  y  $Q$  se tiene que  $P$  es menor a  $Q$  si aparece antes en el diccionario

El proceso para comparar dos palabras es inductivo, Dadas dos palabras  $P$  y  $Q$  si la primer letra de  $P$  aparece antes en el abecedario que la primer letra de  $Q$  entonces decimos que  $P$  es menor a  $Q$  (aparece antes en el diccionario).

En caso de que la primer letra sea igual se comparan las segundas y así inductivamente.

Si el proceso anterior no termina y llegamos a la última letra de alguna de las palabras, hay dos opciones o son la misma palabra o una palabra contiene más letras que la otra. En este último caso la palabra con más letras es la mayor.

Ejemplos: Casa < Casas; Ave < Pez.

A este orden se le llama orden lexicográfico.

En este problema asumiremos que comparar 2 palabras cualesquiera tiene costo 1.

Notemos  $n$  la cantidad de palabras del diccionario,  $P$  la palabra a buscar y  $p(k)$  la función que indica el lugar del diccionario donde está la palabra de la  $k$ -ésima comparación. Un programador ofrece dos programas  $A$  y  $B$  para solucionar el problema.

- A)
- En el primer paso se compara con la palabra 1, es decir  $p(1) = 1$ , si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
  - En el paso  $k$  se compara con la  $k$ -ésima palabra. Si es igual termina el programa sino compara con la siguiente.
- B)
- En el primer paso se compara con la palabra que esta en el lugar  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ , es decir  $p(1) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
  - Si en el paso  $k - 1$  la comparación dio que la palabra  $P$  es menor a la que esta en el lugar  $p(k - 1)$  entonces  $p(k) = \lfloor p(k - 1) - \frac{n}{2^k} \rfloor$ . Si la comparación dio que la palabra  $P$  es mayor entonces  $p(k) = \lceil p(k - 1) + \frac{n}{2^k} \rceil$

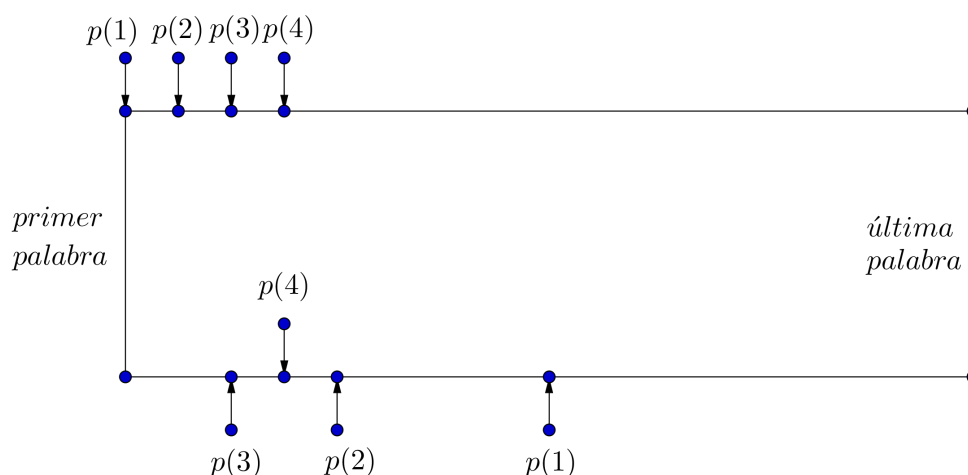


Figura 1: Iteraciones para encontrar la cuarta palabra en un diccionario de 17 palabras

- Acotar aproximadamente el costo mínimo y máximo en cada caso.
  - Discutir sobre cual metodo sera mas eficiente.
  - El diccionario de la RAE tiene aproximadamente 93111 palabras. Cual seria el costo en este caso.
  - En Uruguay hay 900.528 lineas de telefonia fija residencial (Informe Ursec 6/2015). Estimar el costo de ambos algoritmos.
3. Se tiene un conjunto  $A$  de  $n$  elementos con un orden pero que estan desordenados
- Como ejemplo puede pensar en lo siguiente. Se quiere ordenar un mazo de barajas españolas sin comodines. Cada carta esta determinada por su palo y su numero, por ejemplo (oro,2), (basto,10).
- Supongamos que se tiene el mazo desordenado y se quiere ordenar de la siguiente forma. Primero todas las de oro, despues todas las de copa, luego todas las de espada y por ultimo todas las de basto.
- Dar algoritmos para ordenarlos.