Práctico Semana 2

1. Conjuntos

1. Determinar la cantidad de subconjuntos de $A = \{1,2,a,b,c\}$ con 2 elementos. Repetir lo mismo para 3 elementos.

2. Sean A, B y C los conjuntos dados por $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$ y $C = \{7,8,9\}$
   Calcular:

   a) $A \cap B$ *b)* $B \cap C$ *c)* $A \cap C$ *d)* $A \cap B \cap C$

   e) $A \cup B$ *f)* $B \cup C$ *g)* $A \cup C$ *h)* $A \cup B \cup C$ *i)* $A \cup (B \cap C)$

   j) $A \cap (B \cup C)$ *k)* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *l)* $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ *m)* $A \cup (B \setminus C)$

3. Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos

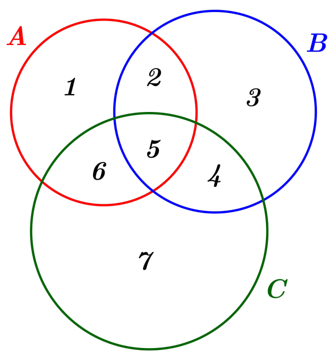
   a) $\{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$ *b)* $\{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 12\}$ *c)* $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ *d)* $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 = 0\}$

4. Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos

   a) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ *b)* $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ *c)* $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

   d) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ *e)* $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

5. Sean A, B y C tres conjuntos como en la figura



   Describir las regiones numeradas apartir de los conjuntos A, B y C y las operaciones binarias $\cup$, $\cap$ y $\setminus$

6. Sean A y B dos conjuntos finitos. Liste los siguientes conjuntos de forma creciente en la cantidad de elementos

$$A,\ A \cap B,\ A \cup B,\ \emptyset,\ A \cup (B \setminus A)$$

7. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes equivalencias, justificando en cada caso. Cuando sea falso determinar si alguna de las implicancias es verdadera.

   a) $(A \neq B) \Leftrightarrow [(A \not\subseteq B) \text{ y } (B \not\subseteq A)]$ *b*) $(A \neq B) \Leftrightarrow [(A \not\subseteq B) \text{ o } (A \not\subseteq B)]$

   c) $(A \subsetneq B) \Leftrightarrow$ es falso que $B \subsetneq A$ *d*) $(A \subset B) \Leftrightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup C)]$

   e) $[(A \subset B) \text{ y } (A \subset C)] \Leftrightarrow [A \subset (B \cap C)]$ *f*) $[(A \subset B) \text{ y } (A \subset C)] \Leftrightarrow [A \subset (B \cup C)]$

8. Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas o falsas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

   a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *b*) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *c*) $(A \cup B) \cap A = A \cup (B \cap A)$

   d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *e*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

9. Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas o falsas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

   a) $A \setminus (B \setminus A) = \emptyset$ *b*) $(A \setminus B) \setminus A = \emptyset$ *c*) $[A \setminus B] = [A \setminus (A \cap B)]$

   d) $A \setminus (A \setminus B) = B$ *e*) $[A \cap (B \setminus C)] = [(A \cap B) \setminus (A \cap C)]$ *f*) $[A \cap (B \setminus C)] = [(A \cap B) \setminus C]$

   g) $A \setminus (B \cup C) = [(A \setminus B) \cup (A \setminus C)]$ *h*) $A \setminus (B \cup C) = [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)]$

10. Dado P un polinomio, definimos el conjunto de las raíces de P como $A_P = \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\}$

    a) ¿Existe P tal que $A_P = \emptyset$?

    b) Sean P y Q dos polinomios, probar que:

    a) $A_P \cup A_Q = A_{PQ}$ *b*) $A_P \cap A_Q = A_{P^2+Q^2}$

    c) Explicar por qué no es cierto que $A_P \cap A_Q = A_{P+Q}$. ¿Se da alguna inclusión entre estos conjuntos?

11. Dados dos conjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}$ definimos $A + B$ al conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$

    a) Calcular $A + B$ en los siguientes casos

    a) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 3\}$ *b*) $A = \{-1, 0, 1\},\ B = \{0, 1, 2, 3\}$ *c*) $A = \{0, 2, 4\},\ B = \{0, 2, 4, 6\}$

    d) $A = [0, 1],\ B = [-1, 0]$ *e*) $A = B = (1, 2)$ *f*) $A = [2, 5],\ B = (1, 3)$

    g) $A = B = \mathbb{N}$ *h*) $A = \mathbb{R}^+,\ B = \{-1, 0, 1\}$ *i*) $A = \mathbb{Z},\ B = (0, 1)$

    b) Discutir sobre condiciones para las que $A \subset A + B$.

12. **Producto cartesiano**

    En este ejercicio todos los conjuntos son no vacíos.

    a) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Listar todos los elementos de $A \times B$ y de $B \times A$.

    b) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Probar que si $(x, y) \in A \times B$ y además $(x, y) \in B \times A$ entonces $\{x, y\} \subset A \cap B$.

    c) Probar que si $A \times B = B \times A$ entonces $A = B$.

2. Funciones

1. **Funciones naturales**

   Para las siguientes funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ realizar los bosquejos de los primeros valores.

   $a)$ $f(n) = n$ $\quad$ $b)$ $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ $\quad$ $c)$ $f(n) = \dfrac{1}{n}$ $\quad$ $d)$ $f(n) = (-1)^n$

   $e)$ $f(n) =$ Primera cifra de n $\quad$ $f)$ $f(n) =$ cantidad de cifras de n que son 7

   $g)$ $f(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i$ donde $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ es la descomposición de n en factores primos

2. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Calcular

   $a)$ $f(f(x))$ (¿Para qué x tiene sentido?) $\quad$ $b)$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad$ $c)$ $f(cx)$

   $d)$ $f(x_1 + x_2)$ $\quad$ $e)$ $f(x_1) + f(x_2)$

   ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$? Indicación: hay muchos más de los que podría parecer a primera vista.

   ¿Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para al menos dos números distintos de x?

3. **Bosquejos**

   $a)$ Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas por $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = |x|$.
   Calcular y graficar $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$.

   $b)$ Examen, mayo 2017, problema 1 parte 2.a
   Sean $f : (0, 4) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 2|$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$ (la parte entera de x).
   Bosquejar $f(x)$, $g(x)$, $(f + g)(x)$.

   $c)$ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x)$ es la distancia de x al entero mas próximo.
   Bosquejar

   $a)$ $f(x)$ $\quad$ $b)$ $f_1(x) = f(2x)$ $\quad$ $c)$ $f_2(x) = f(x) + \dfrac{1}{2} f_1(x)$ $\quad$ $d)$ $f_3(x) = f(4x)$

   $e)$ $f_4(x) = f(x) + \dfrac{1}{2} f_1(x) + \dfrac{1}{4} f_3(x)$

4. Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$

   $a)$ $f(x) = 2x + 1$, $\quad$ $g(x) = 3x - 1$

   $b)$ $f(x) = 2x + 1$, $\quad$ $g(x) = x^3 - x^2 - 4$

   $c)$ $f(x) = |2x + 1|$, $\quad$ $g(x) = x^2 + x + 1$

   $d)$ $f(x) = x + 1$, $\quad$ $g(x) = \text{máx}\{1, x - 1\}$

   $e)$ $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \le 0 \\ x - 8 & 0 < x < 2 \\ 5 & x \ge 2 \end{cases}$, $\quad$ $g(x) = \begin{cases} x - 1 & x \le 0 \\ -1 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & x \ge 2 \end{cases}$

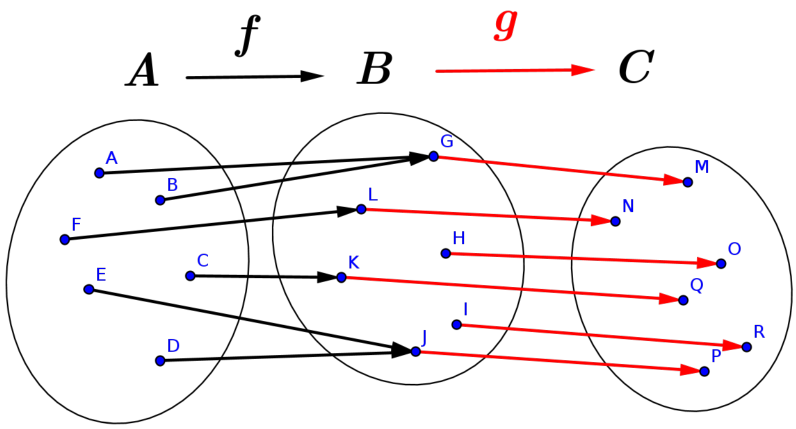
   $f)$ $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < 4 \\ 1 - x & x \ge 4 \end{cases}$, $\quad$ $g(x) = \begin{cases} x + 3 & x \le 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

5. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funciones. Demuestre o de un contraejemplo de las siguientes afrimaciones

$$a)\quad f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ g \qquad b)\quad (g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$

$$c)\quad \frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g \qquad d)\quad \frac{1}{f \circ g} = f \circ \frac{1}{g}$$

6. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama



   a) Calcular $g \circ f$
   b) Para las funciones f, g y $g \circ f$, determinar cuales son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

7. Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuales son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

$$a)\quad A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(x) = x+5 \qquad b)\quad A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ f(x) = x+5$$

$$c)\quad A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(x) = 2x \qquad d)\quad A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ f(x) = 2x$$

$$e)\quad A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ f(x) = x^3 \qquad f)\quad A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^3$$

$$g)\quad A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(x) = 2^x - 1 \qquad h)\quad A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}^+,\ f(x) = 2^x - 1$$

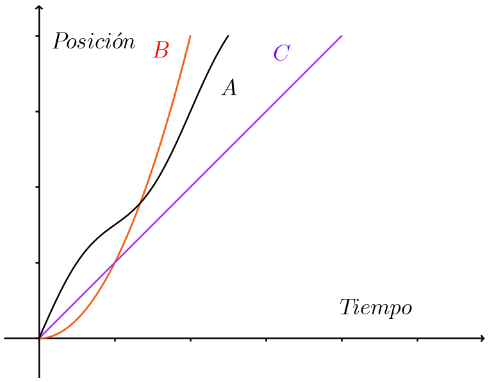
$$i)\quad A = \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(n,m) = 2^n 3^m \qquad j)\quad A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}^+,\ f(n,m) = 2^n 3^m$$

8. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Probar que:
   a) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.
   b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

9. Sean A, B dos conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Probar que para cualquier par de subconjuntos $A_1, A_2 \subset A$ con $A_i \neq \emptyset$ se tiene que
   a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
   b) $f(A_i \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
   c) Si f es inyectiva entonces $f(A_i \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

3. Aplicaciones

1. Tres personas (A, B y C) participan en un carrera de 100 metros. Apartir de las gráficas de sus posiciones en función del tiempo deducir el orden en que llegaron a la meta. ¿Estuvieron siempre en la misma posición?



2. **Escalas**

   Los cambios de unidades muchas veces estan dadas por funciones lineales.

   Por ejemplo, función de conversión de escala de grados Celsuis a Fahrenheit esta dada por la expresión $h(t) = 32 + (1{,}8)t$, es decir que t grados Celsius corresponden a $h(t)$ grados Fahrenheit.

   a) Determinar a cuántos grados Celsius corresponden 100° Fahrenheit

   b) Calcular la función de conversión de escala de grados Fahrenheit a Celsius

   c) Busque la relación pie - metro. Dadas una regla de 1 pie y una de 0.25 metros, determinar cuál de las dos es mas larga. Si se tiene un cubo con volumen de 0.01 pie^3. ¿Cuál es su volumen en cm^3?

   d) Busque la relación milla - metro. Si se tiene plantadas 10 millas^2 de tierra con trigo. ¿Cuantos kilometros^2 hay plantados?

3. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como

   $$f(x) \text{ es el volumen en expresado en } m^3 \text{ de un cubo de lado } xm$$

   Se usa una regla de precisión 0,01 m para medir el lado de un cubo y obtenemos que es x_0. ¿Cuánto es el mayor error posible entre el volumen del cubo y $f(x_0)$? ¿Cómo varía el error máximo en función del volumen del cubo?

4. La tarifa actual del taxi en Montevideo es de

   - Bajada de bandera con 100 metros $38,91
   - Ficha cada 100 metros $2,26

   a) Graficar la función F que relacciona metraje recorrido con precio, esto es $F(x)$ es el precio por recorrer x metros.

   b) Estime el costo para ir desde la explanada de la Universidad hasta la Facultad de Ingeniería.

   c) Si por viajar en la noche el conductor nos cobra un 15% de recargo. ¿Cambia el bosquejo de la función?

5. Temperatura del Aire

   Cuando el aire asciende se dilata, y al dilatarse se enfría a una razón de 1° C cada 100 m de ascenso hasta unos 12 km.

a) Si la temperatura del suelo es de unos $20°C$, calcule la función que describe la temperatura para una altura h

b) ¿Qué intervalos de temperatura se pueden esperar en un avión que alcanza una altitud máxima de 5 km?

6. La empresa MU decidió abrir una nueva oficina pequeña y evalúa sobre qué servicio de UTE contratar. Los que están a consideración son los siguientes

   - Tarifa residencial simple
     Para los servicios con modalidad de consumo residencial cuya potencia contratada sea menor o igual a 40 kW

Cargo por consumo de energía	
1 kWh a 100kWh mensuales	$ / kWh 4.730
101 kWh a 600kWh mensuales	$ / kWh 5.931
601 kWh en adelante	$ / kWh 7.393
Cargo por potencia contratada	$ / kW 56.5
Cargo fijo mensual	$ 182.4

   - Tarifa general simple
     Para servicios no comprendidos en tarifa residencial simple y alumbrado publico, cuya potencia contratada sea menor o igual a 40 kW

Cargo por consumo de energía	
1 kWh a 1000 kWh mensuales	$ / kWh 5.018
1001 kWh en adelante	$ / kWh 5.761
Cargo por potencia contratada	$ / kW 56.5
Cargo fijo mensual	$ 195.8

   Datos Pliego Tarifado UTE 2017

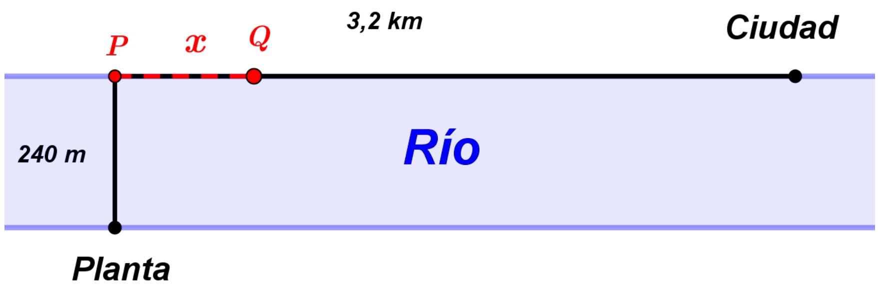
   Asumiendo que la potencia contratada será de 30 kW

   a) Bosqueje las gráficas de costo en función de consumo para ambos servicios.

   b) Determine cuál servicio es más conveniente en función del consumo.

7. **Costos industriales**

   La UTE tiene una planta eléctrica en el río Negro, en un sector donde el torrente tiene un ancho de 240 metros. Tender un cable de la planta hasta un lugar de la ciudad que se encuentra a 3,2 km río abajo en el lado opuesto cuesta US$54 por metro a través del río y US$30 por metro en tierra.



   Suponga que el cable va desde la planta a un punto Q en el lado opuesto del río, lugar que se ubica a x metros del punto P directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ para determinar cuánto costaría tender el cable en términos de la distancia x.