Práctico Semana 1

1. Operaciones elementales

1. Expresar en forma reducida cada uno de los siguientes números.

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ $\quad b)\ 4\left(\frac{1}{3}\right)$ $\quad c)\ \frac{-3}{5}\left(\frac{2}{3}-1\right)-\frac{4}{3}$ $\quad d)\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad e)\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}$ $\quad f)\ \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)$

$g)\ \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)^3$ $\quad h)\ \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\quad i)\ \left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}\right)^{-2}$ $\quad j)\ 3!+\frac{1}{3!}$ $\quad k)\ \frac{5!}{2!+3!}$ $\quad l)\ \frac{6!}{2!3!}$

2. Calcular las siguientes operaciones

$a)\ \left|\frac{7-12}{12-7}\right|$ $\quad b)\ \left|\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right|+\left|-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right|$ $\quad c)\ \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right|$

$d)\ \sum_{k=0}^{10} k$ $\quad e)\ \sum_{k=2}^{4} k^2$ $\quad f)\ \sum_{k=1}^{4}\frac{k}{k+1}$ $\quad g)\ \left|\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^k}{k}\right|$ $\quad h)\ \sum_{k=1}^{5}\left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$

$i)\ \prod_{k=1}^{4} k$ $\quad j)\ \prod_{k=0}^{4} 2^k$ $\quad k)\ \prod_{k=1}^{5}\frac{k+1}{k}$

2. Polinomios

1. Calcular las raíces de los siguientes polinomios.

$a)\ x^2-3x+2$ $\quad b)\ x^2-6x+9$ $\quad c)\ x^2+1$ $\quad d)\ x^6-1$ $\quad e)\ (x^2+2x+1)(x^2-4x+3)$

$f)\ x^2+x+1$ $\quad g)\ 2x^3+7x^2+6x$ $\quad h)\ x^2+6x+4$ $\quad i)\ x^4-x^2-2$ $\quad j)\ (x-1)(x-1)(x+3)(x+4)$

2. Calcular las raíces de los siguientes polinomios.
   a) $P(x)=x^3+2x$
   b) $P(x)=x^3-x^2-4x+4$, sabiendo que 2 es raíz.
   c) $P(x)=8x^3+14x^2-5x-2$ sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz.

3.
   a) Buscar información sobre la existencia de fórmulas para determinar las raíces de un polinomio de grado 3, 4 y 5. En caso de existir dichas fórmulas, aplicarlas a los siguientes polinomios.
      1) $P(x)=x^3-7x-6$
      2) $P(x)=x^4-15x^3+10x+24$
      3) $P(x)=x^5+5x^4-5x^3-25x^2+4x+20$

b) Determinar las distintas familias de polinomios a las que les puede calcular las raíces. Sugerencia: revisar los polinomios del ejercicio 1.

4. En este ejercicio trabajaremos con un polinomio P genérico donde todos sus coeficientes son no negativos, es decir $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ con $a_k \geq 0$ y $n \geq 1$. Determinar cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales falsas, probando en cada caso.

   a) El polinomio P no puede tener raíces.

   b) El polinomio P tiene raíces y todas son no negativas.

   c) El polinomio P tiene raíces y todas son no positivas.

   d) El polinomio P puede tener raíces o no, pero en caso de tenerlas son todas no negativas.

   e) El polinomio P puede tener raíces o no, pero en caso de tenerlas son todas no positivas.

3. Ecuaciones e inecuaciones

1. Determinar para qué valores de x, y son verdaderas las siguientes ecuaciones e inecuaciones.

$$a)\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad b)\ (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \qquad c)\ \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \qquad d)\ \sqrt{x^2} = x$$

$$e)\ x^2 + 4x + 1 \geq 0 \qquad f)\ x(x-1)(x-2)(x-3) < 0$$

$$g)\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y \qquad h)\ \sqrt{x+4} < x \qquad i)\ \sqrt{x^2+1} > 2x - 3$$

2. Determinar para qué valores de x son ciertas las siguientes ecuaciones e inecuaciones.

$$a)\ \frac{2-x}{1+x} \leq 0 \qquad b)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0 \qquad c)\ \frac{x}{x-1} = \frac{2x+1}{x}$$

$$d)\ |\,2x-5\,| < |\,3x+4\,| \qquad e)\ x^2 - 5\,|\,x\,| + 4 \geq 0 \qquad f)\ 3|x| - |x-2| > 2$$

3. Determinar para qué valores de x, y son verdaderas las siguientes ecuaciones e inecuaciones.

$$a)\ \sqrt{x+n} - \sqrt{x} > 1 \text{ con } n \in \mathbb{N} \qquad b)\ |nx| > x^2 \text{ con } n \in \mathbb{N} \qquad c)\ (x+y)^n = x^n + y^n \text{ con } x, y \geq 0$$

$$d)\ x^y = y^x \text{ con } x, y \in \mathbb{N} \qquad e)\ xy \leq x^2 + y^2 \qquad f)\ \sin(x) + \cos(x) \leq 1$$

4. Formular de nuevo cada una de las siguientes expresiones, utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto, En este ejercicio a, b y c son valores reales arbitrarios.

$$a)\ \left|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}\right| \qquad b)\ ||a+b| - |a| - |b|| \qquad c)\ |||a+b|+|c|-|a+b+c|| \qquad d)\ \left|\left|\sqrt{2} + \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{5} - \sqrt{7}\right|\right|$$

5. **Medias**

   En este ejercicio se estudiarán distintos tipos de medias entre dos números.

   Sean a, b dos números reales, con $0 < a < b$, se definen las siguientes medias

$A := \frac{a+b}{2}$	$G := \sqrt{ab}$	$H := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$
Media aritmética	Media geométrica	Media armónica

   Demostrar que $a < H < G < A < b$.

   Definimos ahora la media cuadrática como

$$C := \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

   Probar que $a < C < b$ y comparar C con las otras medias.

4. Aplicaciones

1. Pesas

   Dos niños juegan con una balanza como la de la figura y algunas pesas. Tienen 5 pesas de masa 1, 1/2, 1/4, 1/5 y 1/10 kilogramos.

   Ponen la pesa más grande en el plato de la derecha y las otras en el plato de la izquierda. ¿La balanza quedará en equilibrio, se inclinará hacia la derecha o hacia la izquierda?

   En caso de que la balanza no esté en equilibrio. ¿Existe alguna combinación de pesas, utilizando al menos una, que deje la balanza en equilibrio?

2. El promedio de goles Lionel Messi para el Barcelona en la temporada 2012-13 fue mayor que la de Cristiano Ronaldo para el Real Madrid, sin embargo en la temporada 2013-14 ocurrió de forma opuesta. ¿Quiere decir esto que el promedio de goles de estos jugadores fue igual si tomamos ambas temporadas?

3. **Concentraciones**

   a) Se tienen 2 tazas de capacidad 200 ml, la primera con 150 ml de café y la segunda con 150 ml de crema.

   Se quita una cucharada a la de crema y se la vuelca en el café, luego se revuelve bien hasta que se disuelva.

   Por último se toma una cucharada de la taza con esta solución y se la vuelca en la taza con crema.

   ¿Hay más cafe en la primera taza o más crema en la segunda?

   b) Tenemos una solución 100 g de cloruro de sodio en un litro de agua. Queremos recuperar 35g de la sal haciendo evaporar el agua de una parte de la solución ¿Qué volumen de solución se necesita?

   c) Un fabricante de bebidas gaseosas anuncia su refresco de naranja como “con sabor natural”, a pesar de que contiene solo un 5 % de jugo de naranja. Un nuevo reglamento estipula que para ser llamada “natural”, una bebida debe contener al menos un 10 % de jugo de fruta ¿Cuánto jugo de naranja puro debe agregar a 5000 l del antiguo refresco para cumplir con la nueva normativa?

4. **Descuentos y porcentajes**

   a) Juan decide comprarse un celular nuevo, luego de ver distintos modelos selecciona su favorito. Dos casas de telefonía, Alfa y Bravo venden ese celular a $U\$S$ 900.

   La casa Alfa al entrar en su semana aniversario decide hacer un descuento del 20 %. Sin embargo la casa Bravo decide no quedarse atrás y realiza un descuento del 40 %. Para no perder clientela Alfa decide realizar un nuevo descuento del 20 %.

   ¿Donde debería comprar Juan su celular?

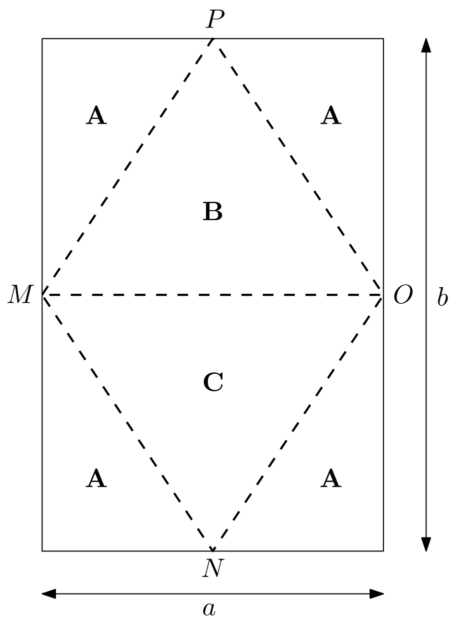
b) Un Shopping decide quitar el IVA a todos sus productos, realizando un descuento del 18.03%. Sin embargo el impuesto IVA aumenta en un 23% el costo del producto. ¿Es esta una publicidad engañosa?

c) Explique qué está mal en las siguientes afirmaciones que aparecieron en el periódico "*The New York Times*".

1) Un nuevo enjuague bucal reduce la placa de los dientes en más de un 300%.
2) Una aerolínea que está trabajando para reducir la pérdida de equipaje, ha mejorado un 100% en los últimos 6 meses.
3) Las tasas de interés bajaron de un 10% a un 5%, esto es, una reducción del 100%.

5. Examen, diciembre 2016, primeras partes del segundo ejercicio de desarrollo.

Se desea excavar un estanque rectangular en el cual se criarán 3 variedades de peces **A**, **B** y **C**, con fines alimentarios. El estanque será dividido en 6 regiones como indica la figura: las cuatro regiones triangulares externas para la especie **A**, la región triangular interna superior para la especie **B**, y la región triangular interna inferior para la especie **C**:



(En la figura, se supone que M, N, O y P son puntos medios de los respectivos lados.)

La separación entre las 6 regiones se efectúa mediante tabiques indicados por líneas discontinuas en la figura.

a) Expresar la suma L de las longitudes de los tabiques en función de a y b.

b) Ahora, se supone que L mide 100 metros. Expresar b^2 en función de a.

El rendimiento de cada especie es proporcional a la superficie del estanque, ya que tiene profundidad constante. Se sabe que el rendimiento por metro cuadrado de la especie **B** es 3/4 del rendimiento de la especie **A** y que el de la especie **C** es 2/3 del de la especie **B**.

c) Expresar el rendimiento $r = r(a)$ del estanque en función de a y de s, donde s es el rendimiento de la especie **A** por metro cuadrado.

6. **Dimensiones**

   a) Una empresa vende una bebida chocolatada en envases de $4{,}0\,\mathrm{cm} \times 6{,}3\,\mathrm{cm} \times 10{,}5\,\mathrm{cm}$. Calcule la capacidad del envase. Sabiendo que la cantidad de bebida por producto es una capacidad estándar, determínela. Determine algún modelo de caja para transportar 10, 18 y 50 unidades. Compare con sus compañeros.

   b) Se desea embaldosar una habitación de $4m^2$. Si cada baldosa mide $20cm^2$, cuantas baldosas se necesitan como mínimo? Calcular para el caso de que la habitación sea de 2 metros de lado y el caso de que sea de 1 por 4. ¿Qué pasa si uno de los lados de la habitación mide $1{,}5m$?

7. A medida que el concreto se seca, se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si la viga de concreto tiene un contenido de agua de ω kg/m^3, entonces se contraerá con un factor

   $$S = \frac{0{,}0032\omega - 2{,}5}{10000}$$

   donde S es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.

   a) Una viga de 12,025m de largo es vaciada en concreto que contiene 250kg/m^3 de agua. ¿Cuál es el factor de contracción S? ¿Que largo tendrá la viga cuando se haya secado?

   b) Una viga mide 10.014 m de largo cuando está húmeda. Deseamos que se contraiga a 10.009 m, de modo que el factor de contracción $S = 0{,}00050$. ¿Qué contenido de agua dará esta cantidad de contracción?

5. Lógica

1. En este ejercicio no importa si las frases son falsas o verdaderas.

   a) Dar el recíproco y contrarrecíproco de las siguientes afirmaciones.

   1) Si pintas tu casa de blanco ahorras energía.
   2) Si el piso está mojado es por que llovió.
   3) Si el boleto de bus sube, más gente usará bicicleta.

   b) Negar, sin usar la palabra no, las siguientes afirmaciones.

   1) Ningún $x \in \mathbb{R}$ cumple que $x^2 = -1$.
   2) Algunos juegos de comedor traen menos de 3 sillas.
   3) (Primer parcial, primer semestre 2010)
      Todos los hombres son inmortales.

2. ¿Dónde está el error en la siguiente "demostración"?

   Sea $x = y$, entonces

   $$\begin{gathered} x^2 = xy \\ x^2 - y^2 = xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) = y(x-y) \\ x + y = y \\ 2y = y \\ 2 = 1 \end{gathered}$$

3. En este ejercicio p, q son frases. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) La sentencia (p y q) es verdadera si p es vedadera.

b) La sentencia (p o q) es falsa si q es falsa

c) La sentencia (p implica q) es verdadera si p es falsa.

d) La sentencia (p implica q) es falsa si p es verdadera y q falsa.

e) Si la sentencia (p implica q) es verdadera y q es verdadero entonces p es verdadera.

f) Si [(no p) implica (no q)] es verdadera y q es verdadera entonces p es verdadera.

g) Si [(no p) implica (no q)] es verdadera y q es verdadera entonces p es falsa.

4. Un ejemplo, una prueba.

   Probar que las siguientes igualdades son falsas.

   a) $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ con $a, b > 0$ *b*) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ *c*) $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$ con $a, b \geq 0$

   d) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ con $a, b > 0$ *e*) $\dfrac{a+b}{a} = b$ con $a, b > 0$ *f*) $\sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b$ *g*) $a^{\frac{-1}{n}} = \dfrac{1}{a^n}$

5. La niña de los ojos azules.

   Se esta creando una nueva inteligencia artificial (AI) y se le presenta el siguiente problema:

   Programador - El señor Juan tiene 3 hijas ¿Puedes decirme sus edades?

   AI - Necesito más datos.

   Programador - El producto de sus edades es 36 mientras que su suma es la cantidad de ventanas de este edificio.

   AI - Conozco ese número pero necesito más datos.

   Programador - La hija menor tiene los ojos azules.

   Luego de esta última información la AI da la respuesta correcta.

   Determinar el procedimiento que utilizó la AI para calcular las edades.