

Sistemas Lineales 1

Pablo Monzón

Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Primer semestre - 2018

Contenido

- 1 **Presentación del curso**
- 2 **Objetivos**
- 3 **Contrato**
- 4 **Elementos de un circuito lineal**
- 5 **Análisis de un circuito lineal**
 - Entrada constante
 - Entrada sinusoidal

Sistemas Lineales 1

Plataforma EVA

<http://eva.fing.edu.uy/>

Destacamos en particular los foros de novedades y de consultas.

Información general del curso: LEERLA en el EVA!!!

- Asignatura de 13 créditos, es decir, **195 horas totales**, que incluyen:
 - 60 horas de clase teóricas,
 - 30 horas de clases de ejercicios
 - 105 horas que comprenden: estudio personal, realización de ejercicios, consultas y preparación de pruebas.
- Es obligatoria para todos los perfiles de Ingeniería Eléctrica y opcional para otras carreras de Ingeniería y Ciencias.

Horarios

- Teóricos: lunes de 9:30 a 12 horas (s. C22), miércoles de 8:00 a 10:00 horas (s. C22).
- Prácticos: lunes de 16:00 a 18:00 horas (s. 305), jueves de 8:00 a 10:00 horas (s. 601).

Docentes

- Pablo Monzón
- Santiago Martínez
- Juan Bazerque
- Andrea Viscarret

Bibliografía

Ajustada al curso

Sistemas lineales en régimen permanente - Juan Piquinela y Pablo Monzón;

Complementaria

- Métodos matemáticos para las ciencias físicas - Laurent Schwartz;
- Análisis de circuitos en Ingeniería - Hayt y Kemmerly;
- Linear network analysis - S. Seshu y N. Balabanian;
- Circuitos - Bruce Carlson;
- Teoría de redes eléctricas - N. Balabanian;
- Fundamentals of circuits theory - N. Balabanian;
- Análisis básico de circuitos eléctricos - Johnson, Hilburn, Johnson y Scott;
- Ingeniería de control moderna - K. Ogata;

OpenFING

Edición filmada: 2016

Las clases filmadas de OpenFING no han sido expresamente preparadas como para constituirse en un curso a distancia o similar. No pretenden sustituir la asistencia al curso. Pueden usarse para recuperar una clase perdida o para una duda puntual, complementando la lectura de los textos recomendados.

Si por distintos motivos no es posible concurrir a las clases teóricas, se sugiere seguir los videos y realizar las hojas de ejercicios, coordinando consultas con los docentes de la asignatura.

Forma de aprobación

Hay dos pruebas parciales. El primer parcial aporta 40 puntos. El segundo 60 puntos.

- Según los resultados de ambas pruebas, el alumno podrá:
 - aprobar completamente la asignatura: para ello deberá obtener al menos el 50 % de los puntos de la primera prueba, al menos el 60 % de los puntos de la segunda prueba y al menos el 70 % de los puntos totales.
 - aprobar el curso, quedando habilitado para rendir el correspondiente examen; para ello deberá obtener al menos el 25 % de los puntos totales.
 - reprobar el curso, debiendo recurrar la asignatura.
- El examen consta de dos pruebas: una de carácter más bien práctico, en la mañana, y otra de carácter más bien teórico, en la tarde.

Objetivos

Generales:

En líneas generales se busca

- dotar al alumno de las herramientas básicas para el modelado y el estudio de circuitos lineales, con especial énfasis en los circuitos funcionando en régimen permanente,
- vincular la formación básica en física y matemática con los fundamentos de la Ingeniería Eléctrica,
- introducir la doble representación tiempo-frecuencia para señales y circuitos,
- desarrollar en el estudiante la intuición referida al funcionamiento de un circuito lineal funcionando en régimen permanente, incluyendo la idea de filtrado,

Objetivos

Generales:

En líneas generales se busca

- introducir los Diagramas de Bode para representar la respuesta en frecuencia de un sistema lineal,
- introducir al alumno en los aspectos vinculados con los conceptos de potencia instantánea y potencia media y los aspectos relacionados, focalizando en los sistemas eléctricos funcionando a 50 Hz,
- introducir nomenclatura técnica específica de Ingeniería Eléctrica.

Objetivos

Específicos:

Se pretende que al egresar de la asignatura el estudiante sea capaz de:

- modelar un sistema lineal a través del producto convolución,
- incorporar el concepto de impulso o Delta de Dirac,
- caracterizar un sistema lineal a través de su respuesta al impulso,
- analizar un circuito lineal funcionando en régimen sinusoidal, utilizando el análisis fasorial, identificando rápidamente las ecuaciones claves del circuito,
- comprender las ventajas y las limitaciones del análisis fasorial,
- obtener y comprender la información espectral de una señal,
- dominar las herramientas de pasaje de señales del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia,
- comprender el concepto de respuesta en frecuencia de un circuito lineal y las ideas básicas de filtrado de una señal,

Objetivos

Específicos:

- obtener la transferencia en régimen sinusoidal de un sistema lineal y representarla gráficamente, por medio de los Diagramas de Bode,
- dominar la construcción de los Diagramas de Bode asintóticos y relacionarlos con los diagramas reales,
- leer e interpretar correctamente la información contenida en los Diagramas de Bode,
- describir cualitativa y cuantitativamente la salida en régimen de un sistema lineal con excitación periódica, no necesariamente sinusoidal,
- comprender los conceptos de potencia activa, reactiva y aparente,
- manejar fluidamente transformadores funcionando en régimen sinusoidal,

Objetivos

Específicos:

- entender los conceptos básicos de los sistemas polifásicos, con particular énfasis en los sistemas trifásicos,
- poder describir conceptos técnicos importantes como ancho de banda, impedancia, potencia activa o frecuencia de corte en un lenguaje técnico-coloquial,
- comprender que la matemática y la física brindan un soporte básico a las distintas áreas de la ingeniería eléctrica, reconociendo un necesario compromiso entre la formalidad matemática y la resolución práctica de problemas de ingeniería

Objetivos

De la ganancia de curso:

Desde un punto de vista directamente relacionado con los objetivos de la asignatura, un alumno que cursa la misma está en condiciones de aprovechar cursos posteriores o rendir el examen con posibilidades de éxito si:

- conoce las componentes básicas de un circuito lineal y puede plantear sus ecuaciones básicas de funcionamiento, a través de las Leyes de Kirchoff y los métodos de nudos o mallas,
- puede resolver un circuito lineal funcionando en régimen sinusoidal, usando fasores,
- maneja la definición de transferencia en régimen sinusoidal de un circuito lineal,
- adquiere un lenguaje *ingenieril coloquial* (sabe, al menos mínimamente, qué quieren decir cosas como *ancho de banda*, *espectro*, *potencia activa y reactiva*, *respuesta en régimen*, etc.),

Objetivos

De la ganancia de curso:

Desde un punto de vista directamente relacionado con los objetivos de la asignatura, un alumno que cursa la asignatura está en condiciones de aprovechar cursos posteriores o rendir el examen con posibilidades de éxito si:

- entiende la descripción dual tiempo-frecuencia para una señal y puede moverse con relativa fluidez entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia a través del uso de las herramientas presentadas en el curso (Fasores, Series de Fourier, Transformada de Fourier, Diagramas de Bode),
- conoce las definiciones y propiedades básicas de estas herramientas,
- maneja las ideas básicas de los sistemas trifásicos equilibrados, principalmente la noción de potencia activa, reactiva y aparente y el concepto de circuito equivalente monofásico,
- sabe compensar la potencia reactiva consumida por una impedancia.

Consultas:

monzon@fing.edu.uy

Contrato del curso

De mi parte

- Preparar las clases
- Procurar que se puedan cumplir los objetivos de formación
- Evaluar en forma acorde a los objetivos de formación esperados
- Estar a disposición permanente dentro y fuera del aula
- Promover un buen clima en el grupo durante todo el semestre

De vuestra parte (lo que se espera)

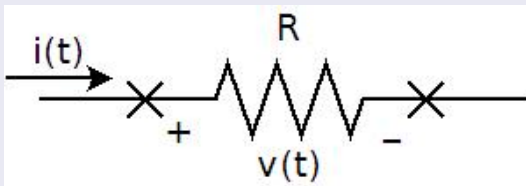
- Leer lo señalado antes de venir a clase
- Dedicar las horas extra-aula esperadas.
- Usar los ámbitos disponibles (clases de teórico, práctico y de consulta, foros, correo) para no quedarse con dudas
- Tener iniciativa y actitud proactiva en el aula
- Promover un buen clima en el grupo durante todo el semestre

Elementos de un circuito

A continuación presentamos los elementos más comunes que conformarán los circuitos que analizaremos.

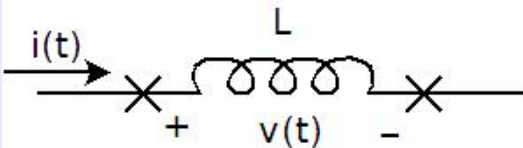
Un elemento tiene por lo general dos terminales y se describe por la relación entre la *tensión en bornes* y la *corriente que lo atraviesa*, usualmente dada por una *ley física*.

Resistencia: $v(t) = R i(t)$ (Ley de Ohm)

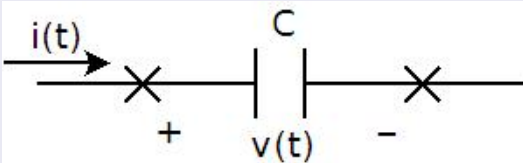


Elementos de un circuito

Inductancia: $v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$, $i(0) = i_0$

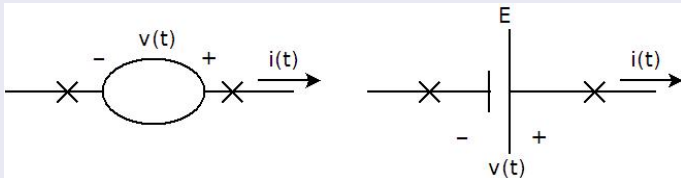


Condensador: $i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$, $v(0) = v_0$



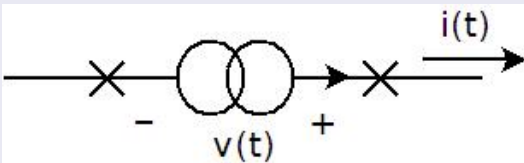
Elementos de un circuito

Fuente independiente de tensión: $v(t)$ dado, $i(t)$ cualquiera



Elementos de un circuito

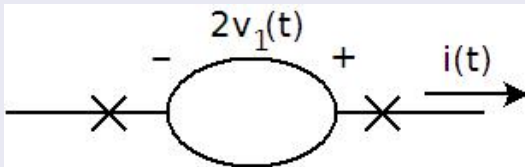
Fuente independiente de corriente: $i(t)$ dado, $v(t)$ cualquiera



Elementos de un circuito

Fuente dependiente de tensión

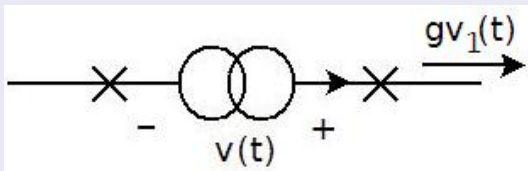
La tensión $v(t)$ es función de otra magnitud del circuito. La corriente $i(t)$ es cualquiera.



Elementos de un circuito

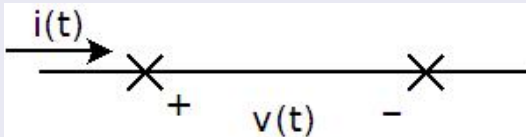
Fuente dependiente de corriente

La corriente $i(t)$ es función de otra magnitud del circuito. La tensión $v(t)$ es cualquiera.

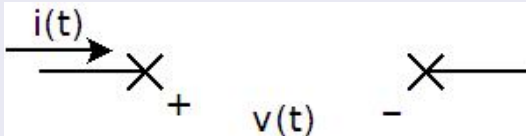


Elementos de un circuito

Cortocircuito: $v(t) = 0$, $i(t)$ cualquiera



Circuito abierto: $i(t) = 0$, $v(t)$ cualquiera

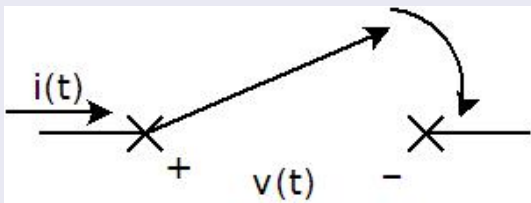


Elementos de un circuito

Llave

Tiene dos posiciones: cerrada (ON) ; abierta (OFF)

ON cortocircuito , OFF circuito abierto



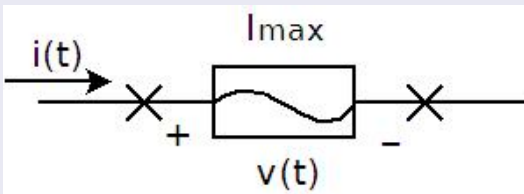
No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.

Elementos de un circuito

Fusible

Tiene dos estados, sano y cortado. Una vez que se corta, cuando el módulo de la corriente alcanza un valor de corte I_{max} , no cambia más su estado.

Sano : cortocircuito , Cortado : circuito abierto



No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.

Elementos de un circuito

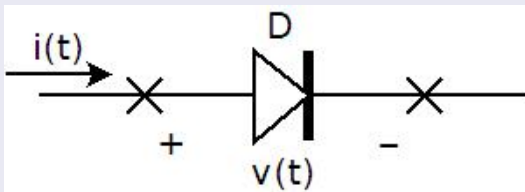
Diodo ideal

Tiene dos estados, ON (cortocircuito) y OFF (circuito abierto),

compatible con la siguiente tabla:

Estado	$v(t)$	$i(t)$
ON	0	> 0
OFF	< 0	0

Su estado depende del resto del circuito.



No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.

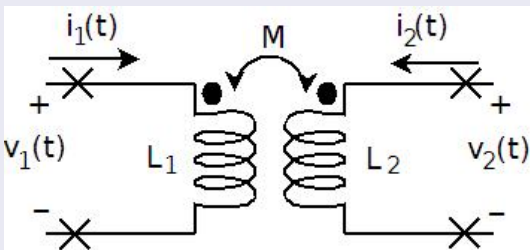
Elementos de un circuito

Transformador

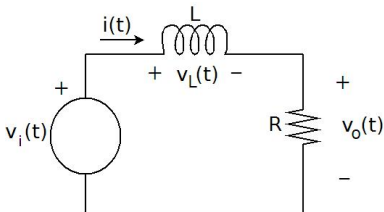
Es un elemento conformado por dos bobinas y un núcleo. Consta de cuatro terminales, agrupados de a dos (primario y secundario).

Con las polaridades y sentidos de la figura, se rige por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$



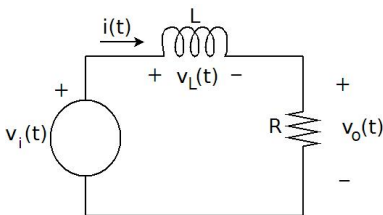
Análisis de un circuito $R - L$



Objetivos:

- Asumiendo conocida la tensión de la fuente (entrada), determinar las tensiones y corrientes del resto de los elementos del circuito, en particular la que consideraremos al *salida del circuito* ($v_o(t)$), **a partir del instante en que se enciende la fuente.**
- Analizar la situación particular de entrada constante.
- Analizar la situación particular de entrada sinusoidal, discutiendo en función de la frecuencia de la entrada.

Ecuaciones generales



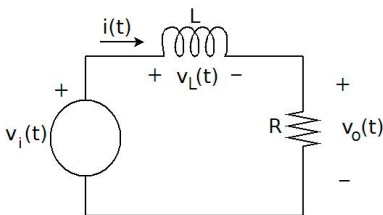
Ley de Kirchoff de mallas

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

Leyes de los elementos

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad , \quad v_o(t) = Ri(t)$$

Ecuaciones generales

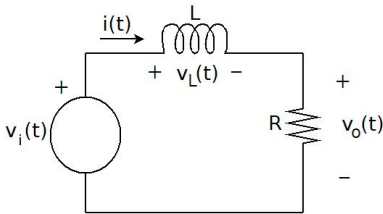


Ecuación de la corriente

$$v_i(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} i(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} v_i(t)$$

- Es una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- La condición inicial es la corriente i_{L_0} por la bobina cuando se inicia el circuito.

Resolvemos la ecuación diferencial

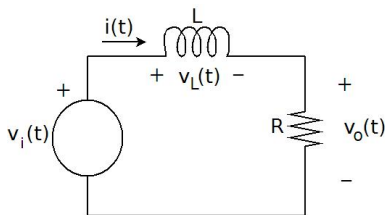


Solución homogénea: $i_H(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{L}{R}$

Comentarios:

- La solución homogénea converge asintóticamente a 0.
- Decimos que es **transitoria**, ya que se extingue al transcurrir el tiempo.
- El parámetro τ - *constante de tiempo del circuito*- da una idea de durante cuánto tiempo es apreciable la solución transitoria.
- Para poder avanzar, tenemos que trabajar con una entrada conocida.

Entrada constante

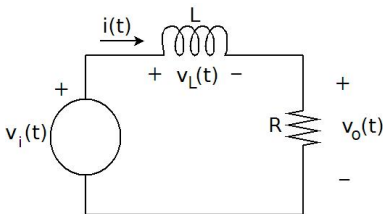
Entrada constante $v_i(t) = E, t \geq 0$ **Ecuación de la corriente**

$$\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$$

Solución particular (constante)

$$i_P(t) = \frac{E}{R}$$

Entrada constante

Entrada constante $v_i(t) = E, t \geq 0$ 

Solución completa

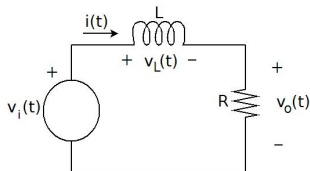
$$i(t) = i_P(t) + i_H(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

donde A se ajusta a partir de la condición inicial: $A = i_{L_0} - \frac{E}{R}$.

La salida

$$v_o(t) = Ri(t) = E + R\left(i_{L_0} - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

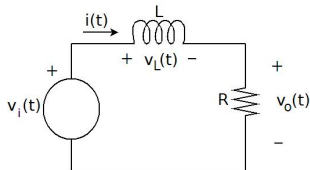
Entrada constante $v_i(t) = E, t \geq 0$



Comentarios

- La solución converge a un valor constante; corresponde a la extinción de la parte transitoria.
- Para un tiempo del orden de dos o tres τ , ya podemos despreciar la parte transitoria ($e^{-2} \approx 0,135$).
- Decimos que alcanzamos un **régimen de continua**.

Entrada constante

Entrada constante $v_i(t) = E, t \geq 0$ 

Comentarios

- El valor de régimen de la corriente es $\frac{E}{R}$, que puede obtenerse observando que, con excitación constante, la bobina actúa como un *cortocircuito*.
- Una situación similar se da con un condensador que, con excitación constante, se comporta como un *circuito abierto*.

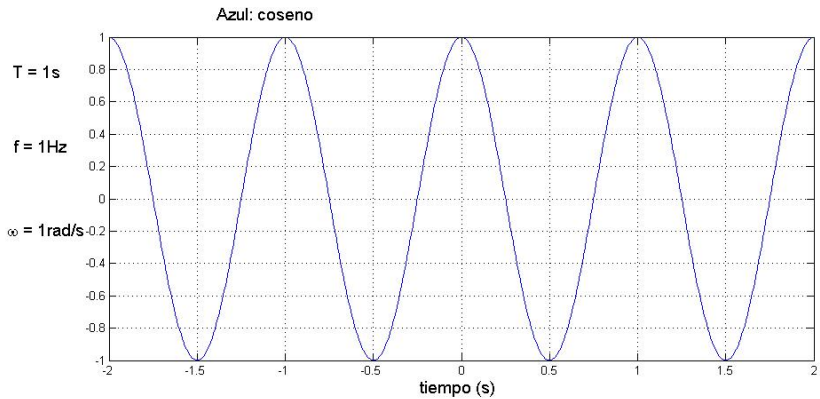
Función sinusoidal

$$A \cos(\omega t + \varphi)$$

- A es la **amplitud** de la señal;
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, siendo
 - T - periodo de la señal,
 - $f = 1/T$ - frecuencia de la señal,
 - ω - pulsación o frecuencia angular de la señal.
- φ es la **fase** de la señal.

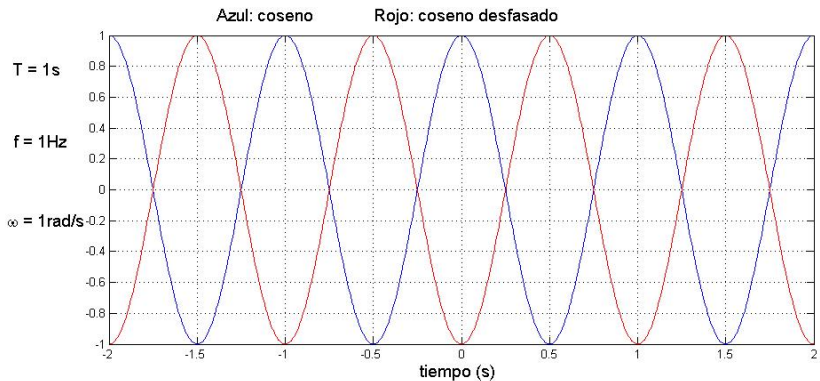
Entrada sinusoidal

Ejemplos



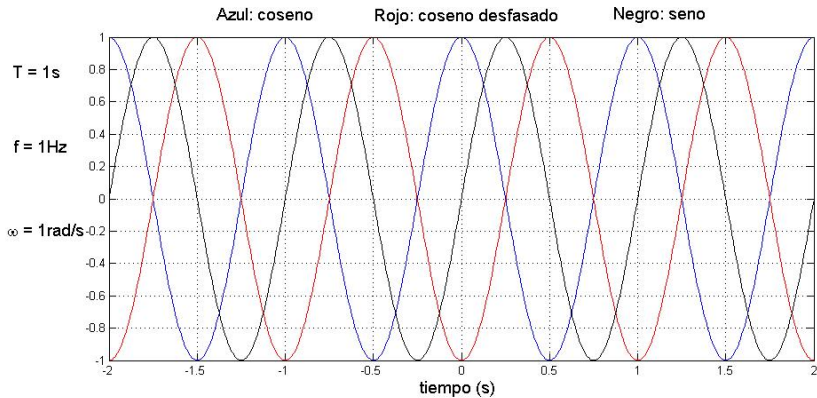
Entrada sinusoidal

Ejemplos

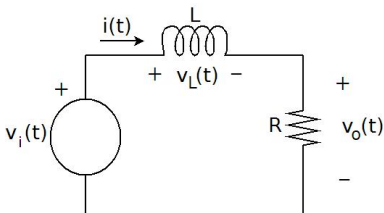


Entrada sinusoidal

Ejemplos



Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$



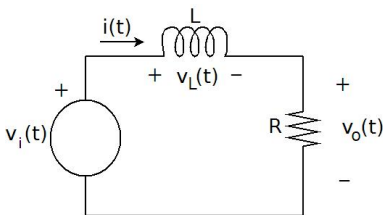
Solución particular (sinusoidal)

$$i_P(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad , \quad \varphi_i = \varphi_v - \operatorname{atan}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

(derivando y sustituyendo en la ecuación de la corriente; ver Notas del curso).

Entrada sinusoidal

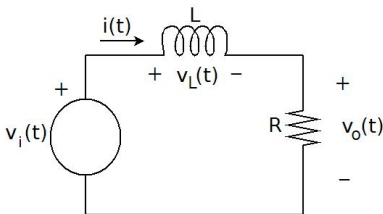
Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$ **Solución completa**

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos \left[\omega t + \varphi_v - \text{atan} \left(\frac{L\omega}{R} \right) \right] + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Salida

$$v_o(t) = \frac{RE}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos \left[\omega t + \varphi_v - \text{atan} \left(\frac{L\omega}{R} \right) \right] + RAe^{-\frac{t}{\tau}}$$

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$



Comentarios

- Nuevamente tenemos un estado de régimen.
- Al pasar el tiempo, la solución tiende a ser sinusoidal, con la misma frecuencia que la entrada (régimen sinusoidal).
- La relación de amplitud entre la entrada y la respuesta en régimen y la respectiva relación entre las fases **dependen de la frecuencia de trabajo**.

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$

Comentarios

- La relación de amplitud entre la entrada y la respuesta en régimen se denomina **ganancia del sistema** y **depende de la frecuencia de trabajo**.

$$\text{relación de amplitud : } \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

- Para frecuencias bajas ($\omega \rightarrow 0$) la relación de amplitudes es casi 1, por lo que la respuesta tendrá aproximadamente la misma amplitud que la entrada.
- Para frecuencias altas ($\omega \rightarrow \infty$) la relación de amplitudes es casi 0, por lo que la salida será aproximadamente nula!!
- Un circuito con este comportamiento se dice que es un **filtro pasabajos**, ya que no altera la amplitud de las señales de frecuencia baja y prácticamente elimina las altas frecuencias.

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$

Comentarios

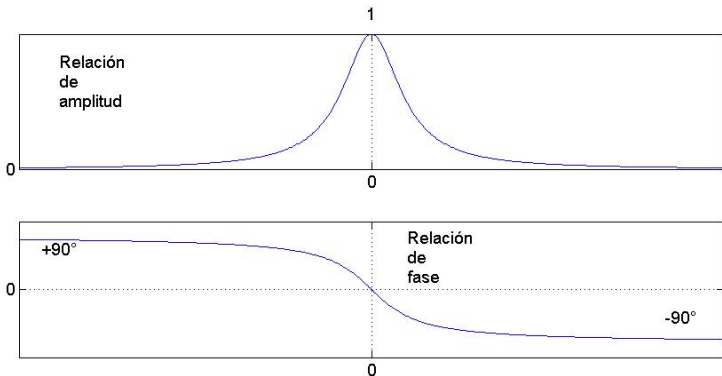
- La relación de fase entre la entrada y la respuesta en régimen depende de la frecuencia de trabajo.

$$\text{relación de fase : } -\operatorname{atan}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

- Para frecuencias bajas ($\omega \rightarrow 0$) el desfasaje es casi 0, por lo que la respuesta tendrá aproximadamente la misma fase que la entrada.
- Para frecuencias altas ($\omega \rightarrow \infty$) la relación de amplitudes es casi $-90\text{ i } \frac{1}{2}$, por lo que si la entrada es un coseno, la salida será prácticamente un seno.

Entrada sinusoidal

Representación gráfica



A lo largo del curso aprenderemos:

- que los resultados que vimos del filtro pasabajos son generales a muchos sistemas lineales descritos por ecuaciones diferenciales lineales, en la medida que la respuesta homogénea sea transitoria.
- herramientas para sistematizar el análisis que hicimos recién, de forma de poder abordar cualquier sistema lineal.
- que el análisis de la respuesta en frecuencia de un circuito nos servirá para conocer en detalle su respuesta frente a una entrada dada.
- varias cosas más, que desarrollaremos en el semestre.