1) Ver teórico (Teorema 3.2.3 de las notas)

2) a) $Q_x = \dfrac{2bx + 2ay - 2xy - 2ab}{((x-a)^2 + (y-b)^2)^2} = P_y$ ✓

b) El campo F es ortogonal al vector tangente a cualquier cfa. centrada en el punto $(a;b)$, (se puede verificar con una parametrización), luego la circulación de F a lo largo de estas cfas. es cero

c) Usando el "Teorema de Green generalizado" (ver Teorema 4.0.9 de las notas), vemos que como F es irrotacional, la circulación a lo largo de cualquier curva que rodee al punto (a,b) da lo mismo, y por (b) es igual a cero. Aplicando directamente el teorema de green, se tiene que la circulación de F a lo largo de cualquier curva que no rodee a (a,b), es cero también. Luego F integra cero a lo largo de cualquier curva cerrada, entonces es de gradientes.

d) La curva varía con $(x;y)$. Podemos parametrizarla de la siguiente forma: $\gamma_{(x,y)}(t) = \begin{cases} (\operatorname{sen} t; \cos t) & \text{si } t \in [0; \operatorname{Atg}(y/x)] \\ (t; y/x \cdot t) & \text{si } t \in \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2/x^2}}; x\right] \end{cases}$

Operando, resulta: $\displaystyle\int_\gamma \langle F(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t)\rangle = \frac{L(x^2+y^2)}{2}$.

(II) 1) Tenemos $\rho = |\operatorname{sen}\varphi|$ con $\varphi \in [0, 2\pi]$.

a) Cambio a coordenadas cartesianas: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$ (*)

Podemos parametrizar según el parámetro φ de la siguiente forma:

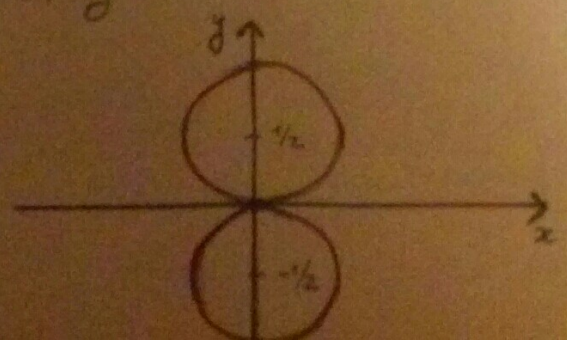
$$\gamma(\varphi) = (x(\varphi); y(\varphi)) \overset{(*)}{=} (\overbrace{|\operatorname{sen}\varphi|}^{\rho(\varphi)} \cdot \cos\varphi ; \overbrace{|\operatorname{sen}\varphi|}^{\rho(\varphi)} \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

Se puede verificar fácilmente que esta parametrización es por longitud de arco, ya que $\|\gamma'(\varphi)\| = 1$.

b) Como tenemos γ parametrizada por longitud de arco, podemos usar la fórmula $K(\varphi) = \|\alpha''(\varphi)\| = 2$. (constante)
(Verificar operando)

c) Recordar que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ es la ecuación de una cfa. centrada en $(a;b)$.
Se puede verificar que con la parametrización de arriba, se tiene $x(\varphi)^2 + (y(\varphi) - 1/2)^2 = 1/4 \quad \forall \varphi \in [0, \pi]$ y que $x(\varphi)^2 + (y(\varphi) + 1/2)^2 = 1/4 \quad \forall \varphi \in [\pi, 2\pi]$.

De modo que la curva con $\varphi \in [0, \pi]$ es una cfa. de centro $(0; 1/2)$ y radio $1/2$, y el tramo con $\varphi \in [\pi; 2\pi]$ es una cfa. con centro $(0; -1/2)$ y radio $1/2$. Queda así:



II 2) Tenemos $\rho = |\operatorname{sen} 3\varphi|$ con $\varphi \in [0, 2\pi]$.

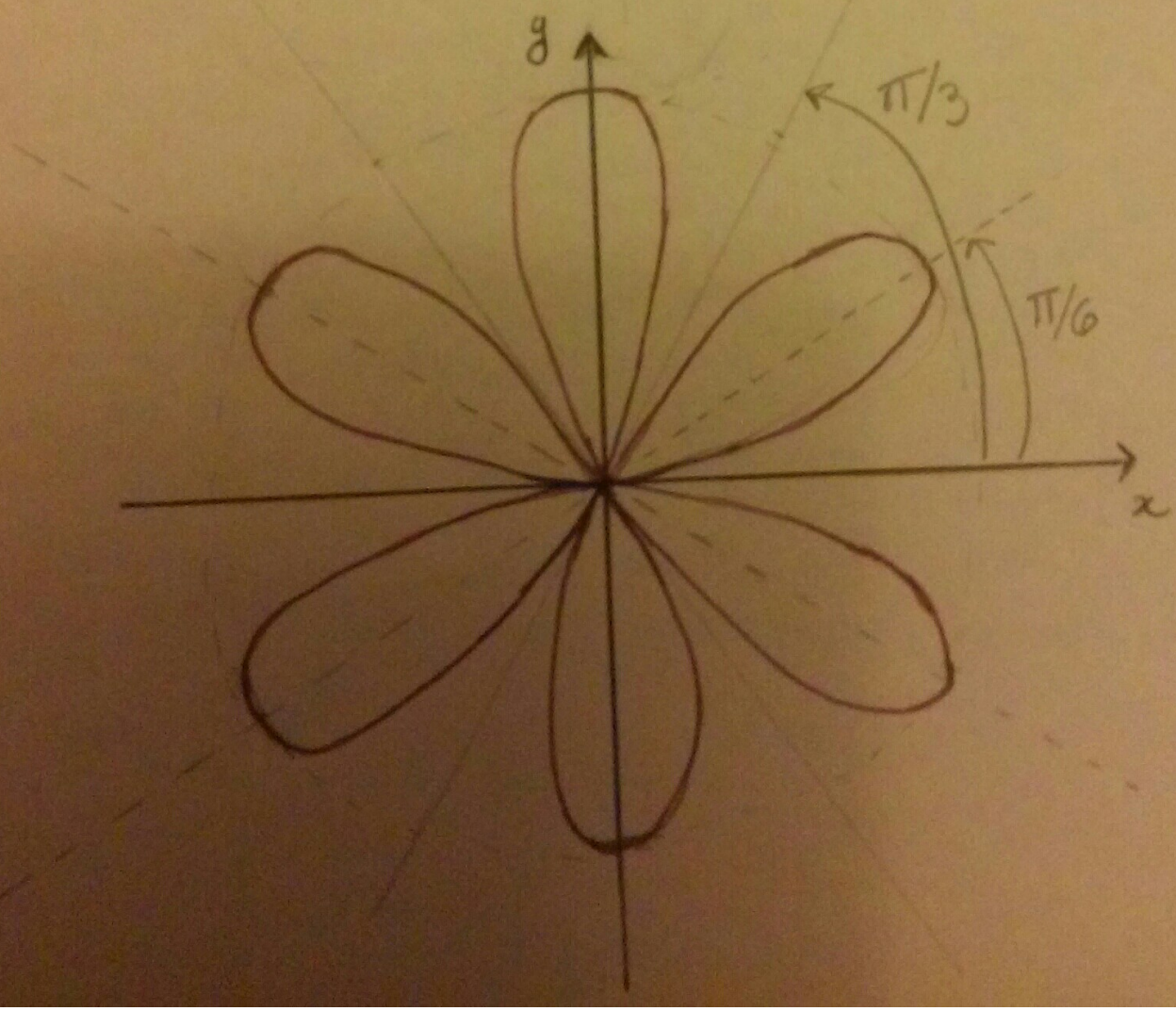
Observar que ρ varía en $[0,1]$ en la medida en que φ varía en $[0, 2\pi]$.

Observar también que ρ se hace 0 cuando φ toma los siguientes valores: 0, $\pi/3$, $\frac{2\pi}{3}$; π, $\frac{4\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$,

y que ρ vale 1 cuando φ toma los siguientes valores:

$\pi/6$, $3\pi/6$, $5\pi/6$, $7\pi/6$, $3\pi/2$ y $11\pi/6$.

Quedaría más o menos así:



Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2016 (semestre par)

Primer parcial 23/9/2016

(I) 1. Pruebe que si la circulación de un campo no depende del camino, entonces es conservativo.

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 - \{(a.b)\} \to \mathbb{R}^2$ el campo definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}, \frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2} \right) = (P,Q),$$

siendo a, b reales cualesquiera.

a) Pruebe que $Q_x - P_y = 0$ (F es irrotacional).

b) Calcule, sin hacer cuentas, la circulación de F a lo largo de una circunferencia de centro en (a,b) y radio r, orientada en sentido antihorario.

c) Pruebe que F es de gradientes.

d) Fije $a = b = 0$ y defina la función $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x,y) = \int_\gamma < F, t > dl,$$

siendo γ la curva que une el punto $(1,0)$ con el punto (x,y) tal como muestra la figura (un arco de circunferencia seguido por un segmento de recta):

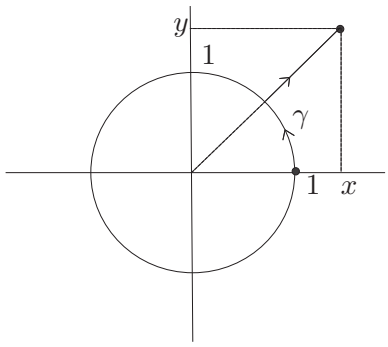


Figura 1:

Calcule explícitamente f y verifique que es un potencial escalar de F.

(II) 1. Considere la curva γ dada en coordenadas polares $\rho = |\text{sen}\varphi|$ con $\varphi \in [0, 2\pi]$.

a) Parametrice γ según la longitud de arco.

b) Calcule curvatura.

c) Bosqueje. Reconoce circunferencias en el bosquejo? Justifique la respuesta.

2. Bosqueje la curva $\rho = |\text{sen}3\varphi|$ con $\varphi \in [0, 2\pi]$.