Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

PRIMER PARCIAL – MARTES 3 DE MAYO DE 2016

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

(I) Múltiple opción. Total: 20 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
E	D	C	B

(II) Desarrollo. Total: 20 puntos

Problema 1 (10 puntos)

1. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ una region tal que U es simplemente conexa. Se considera $F = \big(P, Q\big) : U \to \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1 tal que $Q_x - P_y = 0$ en U. Probar que F es de gradientes.

   Ver teórico.

2. Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por $X(x, y) = \big(2xy + e^x, x^2 + 2y\big)$.

   a) ¿Es X de gradiente en $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta.

   Para X se tiene que $Q_x - P_y = 0$, además $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, entonces X es de gradientes.

   b) Si la respuesta anterior fue afirmativa, hallar un potencial escalar de X en $\mathbb{R}^2$.

   $f(x, y) = x^2y + y^2 + e^x$ **verifica que $\nabla f = X$.**

   c) Hallar $\int_{\mathcal{C}_1} X \cdot ds$ donde $\mathcal{C}_1$ es la curva de la Figura 1.

   C_1 es cerrada y X es de gradientes, entonces la integral sobre esta curva es cero.

   d) Hallar $\int_{\mathcal{C}_2} X \cdot ds$ donde $\mathcal{C}_2$ es la curva que se muestra en la Figura 2.

   X es de gradientes, entonces la integral sobre esta curva es igual a la resta del potencial escalar en los extremos de la misma, es decir $f(0, 4) - f(0, 1) = 15$.

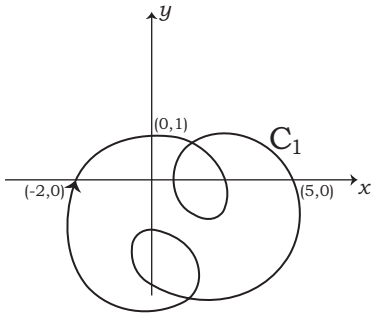


FIGURA 1.

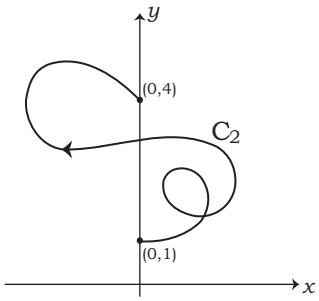
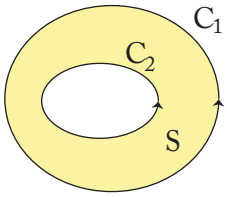


FIGURA 2.

Problema 2 (10 puntos)

1. Sean $X = \big(P, Q\big) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1, C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples regulares y S es la región comprendida entre ellas contenida en U, como se muestran en la figura



   a) (**4 puntos**) Probar que $\displaystyle\oint_{C_1} X \cdot ds - \oint_{C_2} X \cdot ds = \iint_S \big(Q_x - P_y\big) dxdy.$

   Ver teórico

   b) Deducir que si $Q_x - P_y = 0$ entonces $\displaystyle\oint_{C_1} X \cdot ds = \oint_{C_2} X \cdot ds.$
   Ver teórico.

2. Sea $X : \mathbb{R}^2 - \big\{(-1,0)\big\} \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por $X(x,y) = \Big(\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{-2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\Big)$. Calcular $\int\limits_{\mathcal{D}} X \cdot ds$, siendo $\mathcal{D}$ la curva $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $4x^2 + 3y^2 = 100\big\}$ recorrida en sentido antihorario.

Se puede probar que $Q_x - P_y = 0$, entonces, por lo demostrado en la parte anterior, $\displaystyle\oint_{\mathcal{D}} X \cdot ds = \oint_{C_1} X \cdot ds$, donde C_1 es la circunferencia de centro $(-1,0)$ y radio 1.

$$\oint_{C_1} X \cdot ds = \int_0^{2\pi} (2\sin\theta, -2\cos\theta)(-\sin\theta, \cos\theta) dt = \int_0^{2\pi} -2dt = -4\pi.$$