Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

PRIMER PARCIAL – MARTES 3 DE MAYO DE 2016

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Diferentes notaciones para la integral del campo vectorial X sobre la curva C:

$$\int_C X \cdot ds = \int_C \overrightarrow{X} \cdot ds = \int_C \langle X, t \rangle dl.$$

(I) Múltiple opción. Total: 20 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4

Ejercicio 1

Sea α una parametrización por longitud de arco tal que $k(s) \neq 0$ y $\tau(s) = 0$, $\forall s$. Considerar las siguientes afirmaciones:

(a) $n' = -kt$ y b es constante.
(b) Si k es constante, entonces el centro de curvatura es un punto fijo.
(c) Si k es constante la curva parametrizada por α está contenida en una circunferencia.

Entonces

A. Todas la afirmaciones son falsas.
B. Sólo la afirmación (a) es verdadera.
C. Sólo la afirmación (b) es falsa.
D. Sólo la afirmación (c) es falsa.
E. Todas la afirmaciones son verdaderas.

Ejercicio 2

Sean C una curva cerrada simple regular en $\mathbb{R}^2$ orientada en sentido antihorario y D la región encerrada por dicha curva, tal que el área de D es $\frac{\pi}{2}$. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $g(x, y) = \frac{e^{x+y} - e^{x-y}}{e^{xy}}$ y f de clase C^1 tal que $f(x, y) = 4, \forall (x, y) \in D$. Finalmente se consideran los campos X, Y, Z, W de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ que verifican lo siguiente:

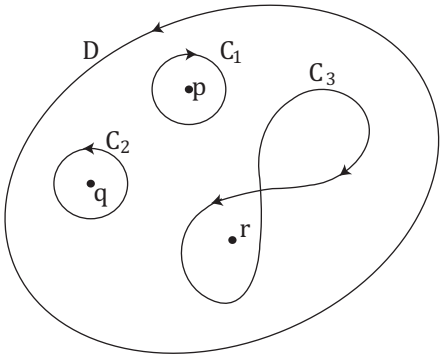
- $rot\big(X\big) = (0, 0, 6)$.
- $rot\big(fY\big) = (0, 0, -4)$.
- $rot\big(Z + \nabla g\big) = (0, 0, -3)$.
- $W = X + Y + Z$.

Entonces $\int_C W \cdot ds$ vale:

A. $-\frac{\pi}{2}$.
B. 0, pues W tiene potencial escalar en $\mathbb{R}^2$.
C. $\frac{\pi}{2}$.
D. π.
E. 2π, pues $\int_C W \cdot ds = \int_{C'} W \cdot ds$, donde C' es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.

Ejercicio 3

Sea $X = \big(P, Q\big) : \mathbb{R}^2 - \{p, q, r\} \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $Q_x - P_y = 0$ y tal que la circulación a lo largo de la curva C_1 vale 3 y a lo largo de la curva C_2 vale 2 y a lo largo de C_3 vale 1. Entonces, la circulación de X a lo largo de la curva de D (ver figura) es:



A. $\int_D X \cdot ds = 6$.
B. $\int_D X \cdot ds = -1$.
C. $\int_D X \cdot ds = 0$.
D. $\int_D X \cdot ds = -6$.
E. $\int_D X \cdot ds = 1$.

Ejercicio 4

Sea S la superficie dada por $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, y π el plano $x + 4y + 6z = 0$. Entonces:

A. Existe un único plano tangente a S paralelo a π que pasa por $(1, 2, 2)$.
B. Existen dos planos tangentes a S paralelos a π que pasan por los puntos $(1, 2, 2)$ y $(-1, -2, -2)$ de S respectivamente.
C. No existen planos tangentes a S que sean paralelos a π.
D. Existe un único plano tangente a S paralelo a π que pasa por $(0, 3, 1)$.
E. Existen dos planos tangentes a S paralelos a π que pasan por los puntos $(0, 3, 1)$ y $(0, -3, -1)$ de S respectivamente.

(II) Desarrollo. Total: 20 puntos

Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (10 puntos)

1. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ una region tal que U es simplemente conexa. Se considera $F = \big(P, Q\big) : U \to \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1 tal que $Q_x - P_y = 0$ en U. Probar que F es de gradientes.
2. Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por $X\,(x, y) = \big(2xy + e^x, x^2 + 2y\big)$.
   a) ¿Es X de gradiente en $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta.
   b) Si la respuesta anterior fue afirmativa, hallar un potencial escalar de X en $\mathbb{R}^2$.
   c) Hallar $\int\limits_{\mathcal{C}_1} X \cdot ds$ donde $\mathcal{C}_1$ es la curva de la Figura 1.
   d) Hallar $\int\limits_{\mathcal{C}_2} X \cdot ds$ donde $\mathcal{C}_2$ es la curva que se muestra en la Figura 2.

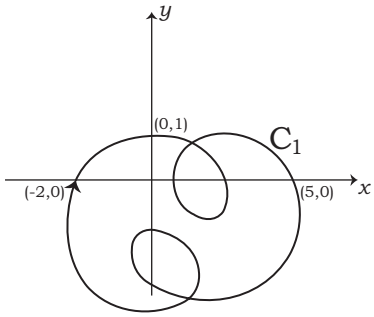


FIGURA 1.

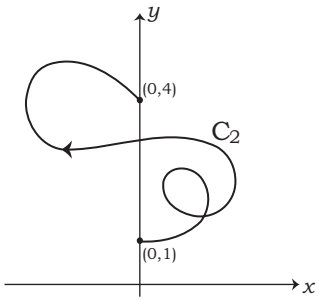
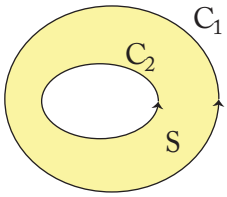


FIGURA 2.

Problema 2 (10 puntos)

1. Sean $X = \big(P, Q\big) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1, C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples regulares y S es la región comprendida entre ellas contenida en U, como se muestran en la figura



   a) Probar que $\displaystyle\oint_{C_1} X \cdot ds - \oint_{C_2} X \cdot ds = \iint_S \big(Q_x - P_y\big) dxdy.$
   b) Deducir que si $Q_x - P_y = 0$ entonces $\displaystyle\oint_{C_1} X \cdot ds = \oint_{C_2} X \cdot ds.$
2. Sea $X : \mathbb{R}^2 - \big\{(-1, 0)\big\} \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por $X(x, y) = \Big(\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{-2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\Big)$. Calcular $\int\limits_{\mathcal{D}} X \cdot ds$, siendo $\mathcal{D}$ la curva $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } 4x^2 + 3y^2 = 100\big\}$ recorrida en sentido antihorario.