Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

SOLUCIÓN EXAMEN JULIO 2016

Problema 1 (35 puntos)

1. Es fácil ver que $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{(y-b)^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$ y $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(y-b)^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$.
   Entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, por lo tanto X_p es irrotacional.
2. Consideremos $\mathcal{C}_{p,1}$ la circunferencia de centro p y radio 1. Sea $\alpha(\theta) = (a+\cos\theta, b+\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ una parametrización de la misma, entonces
   $$\int_{C_{p,1}} X \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0.$$
   Por lo tanto X_p no es de gradientes.
3. Considerar C' una curva cerrada simple regular que rodea a p, contenida en la región limitada por C y la limitada por $\mathcal{C}_{p,1}$. Como X_p es irrotacional, aplicando la generalización de Green al par C', C deducimos que
   $$\int_{C'} X_p \cdot ds = \int_C X_p \cdot ds.$$
   De igual forma, si aplicamos la generalización de Green al par C', $\mathcal{C}_{p,1}$ tenemos que
   $$\int_{C'} X_p \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_{p,1}} X_p \cdot ds.$$
   De estas dos igualdades concluimos que
   $$\int_C X_p \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_{p,1}} X_p \cdot ds.$$
4. Aplicando la parte anterior y el cálculo de la parte 2 concluimos que
   $$\int_C X \cdot ds = \int_C X_p \cdot ds + \int_C X_q \cdot ds + \int_C X_r \cdot ds = 2 \times 2\pi + 2\pi - 2\pi = 4\pi.$$

Problema 2 (35 puntos)

1. Ver teórico.
2. Sea V el volumen encerrado por S_1 y S_2, cortemos este volumen con un plano π transversal, y sean V_1, V_2 los dos sub-volúmenes obtenidos. La frontera de V_1 es $S_1^+ \cup S_2^+ \cup S$ y la frontera de V_2 es $S_1^- \cup S_2^- \cup S$, donde $S = V \cap \pi$ y $S_i^\pm$ son las dos componentes de S_i que se obtienen al cortarla por el plano π, $i = 1, 2$. Para aplicar el teorema de Gauss orientamos ∂V_1 y ∂V_2 con normal exterior. Entonces
   $$\iint_{\partial V_1} X \cdot dS = \iiint_{V_1} \operatorname{div} X dV = 0$$
   y
   $$\iint_{\partial V_2} X \cdot dS = \iiint_{V_2} \operatorname{div} X dV = 0.$$

Por lo tanto $0 = \iint_{\partial V_1} X \cdot dS = \iint_{S_1^+} X \cdot dS + \iint_{S_2^+} X \cdot dS + \iint_S X \cdot dS$, donde S_1^+,S_2^+ y S están orientadas con normal exterior a V_1. De igual forma $0 = \iint_{\partial V_2} X \cdot dS = \iint_{S_1^-} X \cdot dS + \iint_{S_2^-} X \cdot dS + \iint_S X \cdot dS$, donde S_1^-, S_2^- y S están orientadas con normal exterior a V_2. Observar que las orientaciones sobre S son opuestas, entonces las integrales correspondientes son iguales y opuestas. Por lo tanto, sumando obtenemos

$$\iint_{S_1^+} X \cdot dS + \iint_{S_2^+} X \cdot dS + \iint_{S_1^-} X \cdot dS + \iint_{S_2^-} X \cdot dS = 0,$$

entonces

$$\iint_{S_2} X \cdot dS = \iint_{S_2^+} X \cdot dS + \iint_{S_2^-} X \cdot dS = -\iint_{S_1^+} X \cdot dS - \iint_{S_1^-} X \cdot dS = \iint_{S_1} X \cdot dS$$

ambos con la misma orientación.

3. Como $\operatorname{div} X = 0$ podemos usar la parte anterior y cambiar la superficie por una más conveniente. Por ejemplo, podemos tomar la esfera centro el origen y radio 1, con normal exterior. Entonces

$$\iint_{cubo} X \cdot dS = \iint_{S^2} X \cdot dS = \frac{1}{3} A(S^2) = \frac{4}{3}\pi.$$

Problema 3 (30 puntos)

1. Sea $\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ una 2-forma, donde P, Q, R son campos escalares diferenciables. Consideremos el campo $X = (P, Q, R)$. Calculemos ahora la derivada exterior de ω.

$$d\omega = dP \wedge dydz + dQ \wedge dzdx + dR \wedge dxdy = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dydz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dzdx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dxdy$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Observar que $dP = P_x dx + P_y dy + P_z dz$, entonces $dP \wedge dydz = (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dydz = P_x dx \wedge dydz + P_y dy \wedge dydz + P_z dz \wedge dydz = P_x dx \wedge dydz = P_x dxdydz$, porque $dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$ y el producto es conmutativo graduado y asociatido. De igual forma se prueba una igualdad similar para Q y R, de lo que se deduce la igualdad de arriba.
Entonces $d\omega = \operatorname{div} X dxdydz$.

2. *a*) ω es cerrada si $d\omega = 0$. Veamos cuando pasa esto.

$$d\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{k/2}} (3 - k) = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

b) $\displaystyle\int_{S^2} \omega = \iint_{S^2} (x, y, z) \cdot dS = A(S^2) = 4\pi \neq 0$ para todo $k > 0$.

c) Si ω es exacta entonces existe η una uno forma tal que $\omega = d\eta$. Entonces, por el teorema general de Stokes tenemos que

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2} d\eta = \int_{\partial S^2} \eta = 0$$

porque S^2 es una superficie cerrada. Pero por lo parte anterior sabemos que esto no pasa para ningún valor de k. Entonces ω no es exacta para ningún valor de k.