**Universidad de la República** **Cálculo 3**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Primer Semestre 2016**

EXAMEN JULIO
SÁBADO 23 DE JULIO DE 2016

| Nro de Examen | Cédula | Apellido y nombre |
|---|---|---|
| | | |

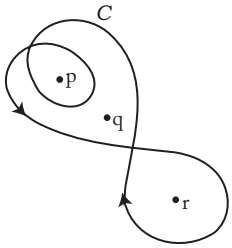
**El mínimo puntaje para aprobar el examen es 60 puntos.**
Duración del examen 3 horas.
Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

## Problema 1 (35 puntos)

Dado $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ se considera el campo $X_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 - \{(a, b)\} \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$X_{(a,b)}(x, y) = \left( \frac{-y + b}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \ , \ \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \right).$$

1. Probar que $X_p$ es irrotacional $\forall\ p \in \mathbb{R}^2$.
2. Probar que $X_p$ no es de gradientes para ningún $p \in \mathbb{R}^2$ (sugerencia: estudiar primero $X_{(0,0)}$ y adaptar la prueba para los demás casos).
3. Probar que si $C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada simple regular que rodea a $p \in \mathbb{R}^2$ entonces $\int_C X_p \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_{p,1}} X_p \cdot ds$, donde $\mathcal{C}_{p,1}$ es la circunferencia de centro $p$ y radio 1, y ambas curvas son recorridas en el mismo sentido.
4. Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva regular y $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ como se muestran en la figura. Dado $X = X_p + X_q + X_r$, calcular $\int_C X \cdot ds$.




## Problema 2 (35 puntos)

1. Enunciar el teorema de Gauss.
2. Sea $X$ un campo de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tal que $\operatorname{div}(X) = 0$. Sean $S_1$ y $S_2$ dos superficies compactas, conexas, sin borde, orientadas con normal saliente y tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $(0, 0, 0)$ pertenece al volumen encerrado por $S_1$ que está a su vez contenido en el volumen encerrado por $S_2$. Probar usando el teorema de Gauss que el flujo saliente de $X$ a través de ambas superficies es el mismo.
3. Calcular aplicando lo anterior el flujo a través del cubo $[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$, orientado con la normal exterior, del campo $X(x, y, z) = \dfrac{1}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$.

**Problema 3 (30 puntos)**

1. Sea $\omega$ una 2-forma definida en $\mathbb{R}^3$, probar que existe un campo $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$d\omega = \operatorname{div} X dxdydz.$$
2. Considere la 2-forma diferencial definida en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ dada por
$$w = \frac{1}{r(x,y,z)^k}\left[xdydz + ydzdx + zdxdy\right],$$
siendo $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $k > 0$.
   *a*) Probar que $w$ es cerrada si y solamente si $k = 3$.
   *b*) Probar que
$$\int_{S^2} w \neq 0,$$
   para todo $k > 0$, donde $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ con la normal exterior.
   *c*) Estudiar si $w$ es exacta, discutiendo según $k > 0$.