Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2016**

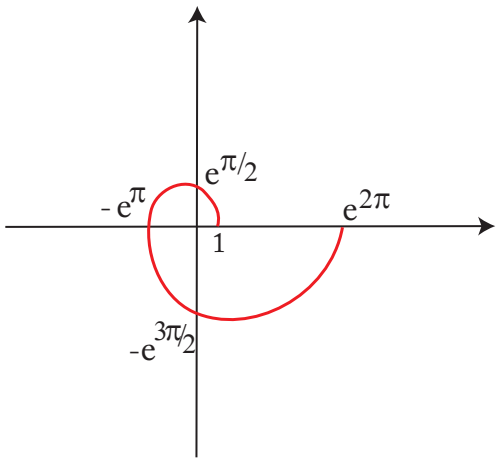
EXAMEN FEBRERO
MARTES 7 DE FEBRERO DE 2017

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

El mínimo puntaje para aprobar el examen es 60 puntos y un problema correcto.
Duración del examen 3 horas. Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (35 puntos)

1. Ver teórico.
2. *a)*



b) $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{2} e^{\tau} d\tau = \sqrt{2}\big(e^t - 1\big)$, entonces $t(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$

$$\gamma(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\sin\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)\right)$$

c) Usando la parametrización por longitud de arco: $l(\gamma) = s(2\pi) - s(0) = \sqrt{2}\big(e^{2\pi} - 1\big)$, usando la otra parametrización $l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2}\big(e^{2\pi} - 1\big)$.

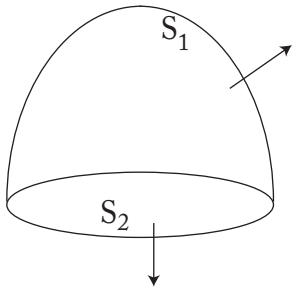
d) $\gamma(\pi/2) = (0, e^{\pi/2})$, entonces la recta tangenete es

$$L(t) = \gamma(\pi/2) + (t - \pi/2)\gamma'(\pi/2) = e^{\pi/2}\big(\pi/2 - t, t + 1 - \pi/2\big) \Rightarrow x + y = e^{\pi/2}.$$

Problema 2 (30 puntos)

1. Ver teórico.
2. *a)* $\operatorname{div} X = 0$.

b)



Resolvamos este problema usando el teorema de la divergencia. Como, por la parte anterior, $\operatorname{div} X = 0$ y sea S la superficie cerrada $S_1 \cup S_2$ (ver figura) y V el volumen encerrado por S, podemos plantear:

$$0 = \iiint_V \operatorname{div} X dV = \iint_S X \cdot dS = \iint_{S_1} X \cdot dS + \iint_{S_2} X \cdot dS$$

con las normales exteriores, como en la figura. Entonces

$$\iint_{S_1} X \cdot dS = -\iint_{S_2} X \cdot dS$$

Hallemos la segunda integral. Consideremos la parametrización de S_2: $\varphi(r,\theta) = \big(\sqrt{3}r\cos\theta, \sqrt{2}r\sin\theta, 0\big)$, con $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Su vector normal es: $\varphi_r \wedge \varphi_\theta = \big(0, 0, \sqrt{6}r\big)$ que apunta hacia arriba. Tiene la orientación opuesta a la pedida. Entonces

$$\iint_{S_2} X \cdot dS = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} X(\varphi(r,\theta)) \cdot (0,0,\sqrt{6}r) dr d\theta$$

$$= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\sqrt{6} r^3 \sin^2\theta = 2\sqrt{6}\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}}\pi.$$

Por lo tanto $\displaystyle\iint_{S_1} X \cdot dS = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi$.

Problema 3 (35 puntos)

1. $\omega_1 = adx + bdy + cdz$ y $\omega_2 = edx + fdy + gdz$, entonces $X_{\omega_1} = (a,b,c)$ y $X_{\omega_2} = (e,f,g)$. Es fácil ver que

   $$X_{\omega_1} \wedge X_{\omega_2} = \big(bg - cf, ce - ag, af - be\big).$$

   Por otro lado, usando las propiedades del producto exteriro, $\omega_1 \wedge \omega_2 = \big(adx + bdy + cdz\big) \wedge \big(edx + fdy + gdz\big) = (bg - cf)dydz + (ce - ag)dzdx + (af - be)dxdy$. Entonces

   $$X_{\omega_1 \wedge \omega_2} = \big(bg - cf, ce - ag, af - be\big).$$

   De lo cual se deduce que

   $$X_{\omega_1 \wedge \omega_2} = X_{\omega_1} \wedge X_{\omega_2}.$$

2. *a*) ω es exacta s iexiste una 1-forma η tal que $d\eta = \omega$. Usando la sugerencia busquemos η de la forma $a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + \frac{z}{x^2+y^2}dz$. Haciendo cuentas obtenemos

   $$d\eta = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{2xz}{\big(x^2+y^2\big)^2}\right) dzdx - \left(\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{2yz}{\big(x^2+y^2\big)^2}\right) dydz,$$

igualando con ω tenemos que

$$\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{4xyz}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{2xz}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2xz}{(x^2+y^2)^2},$$
$$-\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{2yz}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2},$$

entonces $\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{y}{x^2+y^2}$. Es fácil ver que si tomamos

$$a(x,y,z) = \frac{xz}{x^2+y^2}, \quad b(x,y,z) = \frac{-yz}{x^2+y^2}$$

se verifican todas las igualdades. Entonces

$$\eta = \frac{xz}{x^2+y^2}dx - \frac{yz}{x^2+y^2}dy + \frac{z}{x^2+y^2}dz.$$

b) Por lo que vimos en la parte anterior y aplicando el teorema de formas: $\int_S \omega = \int_S d\eta = \int_{\partial S} \eta$, donde ∂S es la unión de los dos círculos, de altura $z = 1$ y $z = 0$. Es claro que la integral sobre el círculo de altura $z = 0$ es nula por la definición de η. Entonces $\int_S \omega = \int_C \eta$, donde C es la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

$$\int_S \omega = \int_C x dx - y dy + dz = -\int_0^{2\pi} (\cos\theta, \sin\theta, 1)(-\sin\theta, \cos\theta, 0) d\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi} 2\sin\theta\cos\theta d\theta = \sin^2\theta|_0^{2\pi} = 0.$$