Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2016**

EXAMEN FEBRERO
MARTES 7 DE FEBRERO DE 2017

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

El mínimo puntaje para aprobar el examen es 60 puntos y un problema correcto.
Duración del examen 3 horas. Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (35 puntos)

1. Enunciar la fórmula para calcular la longitud de una curva parametrizada por $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ con $t \in [a, b]$. Probar que la longitud de una curva no depende de la parametrización.
2. Se considera la curva γ parametrizada de la siguiente manera:
$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \text{sen } t \end{cases},$$
con $t \in [0, 2\pi]$.
   a) Bosquejar la curva γ.
   b) Hallar la parametrización según la longitud de arco.
   c) Hallar la longitud de la curva.
   d) Hallar la ecuación de la recta tangente a γ por el punto $(0, e^{\pi/2})$.

Problema 2 (30 puntos)

1. Enunciar el teorema de Gauss.
2. Se considera el campo $X : \mathbb{R}^2 \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ como
$$X(x, y, z) = \left(0, e^{\sin xz} + \tan(z/2), y^2\right).$$
   a) Calcular la $\operatorname{div} X$.
   b) Hallar el flujo del campo X a través del semielipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$, con su normal apuntando hacia arriba.

Problema 3 (35 puntos)

1. Sean ω_1 y ω_2 dos 1-formas en $\mathbb{R}^3$ y X_{ω_1}, X_{ω_2} los campos vectoriales asociados. Obtener una relación entre el campo $X_{\omega_1 \wedge \omega_2}$ y los campos X_{ω_1} y X_{ω_2}.
2. Se considera la 2-forma ω en $\mathbb{R}^3 - \big\{(x, y, z) : x = y = 0\big\}$ definida por:
$$\omega = \frac{4xyz}{(x^2+y^2)^2} dxdy + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}\right) dzdx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}\right) dydz$$
   a) Probar que ω es exacta. Sugerencia: hallar una 1-forma del tipo $\eta = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + \frac{z}{x^2+y^2}dz$.
   b) Hallar $\displaystyle\int_S \omega$ donde $S = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\big\}$, con la normal apuntando hacia adentro del cilindro.