SOLUCIÓN EXAMEN DICIEMBRE
SÁBADO 10 DE DICIEMBRE DE 2016

Problema 1

1. Ver teórico.
2. Sea $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (2xz, -\sin y, x^2)$.
   a) $\operatorname{rot} X = 0$ y $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo entonces X de gradientes.
   b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = X$, por lo cual $f_x = 2xz$, entonces $f(x, y, z) = x^2 z + g(y, z)$, además $f_y(x, y, z) = -\sin y$. Es fácil ver que $f(x, y, z) = x^2 z + \cos y$ es un potencial escalar de X.
   c) $\displaystyle\int_\alpha X ds = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = f(-1, 0, 8) - f(0, 0, 1) = 8.$

Problema 2

1. Es fácil ver que $\operatorname{div} X = 3$, por lo tanto X no es solenoidal.
2. Observar que $X(x, y, z) = \frac{7}{8}(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in S$. Como la normal es exterior tenemos que
$$\iint_S X.n = \iint_S \frac{7}{4} = \frac{7}{4} A(S) = 28\pi.$$
3. Sea Y el campo definido en $\mathbb{R}^3$ como $Y(x, y, z) = (x, y, z)$ y Z el campo definido en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ por $Y - X$.
   Como X no es solenoidal no puede admitir un potencial vector, ya que si dicho potencial existiera entonces la divergencia de X debería ser cero. Para probar que Z no tiene potencial vector basta ver que $\displaystyle\iint_U Z.n \neq 0$, donde $U \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$.

Problema 3

1. Ver teórico.
2. Si fijamos un sistema de coordenadas donde el eje z es el eje del cilindro y los ejes x e y son perpendiculares al mismo tenemos que $X(x, y, z) = (0, 0, a)$, donde a es constante, entonces $\operatorname{rot} X = (0, 0, 0)$ y $\operatorname{div} X = 0$.
   Otra forma de probarlo es usando la parte anterior. Basta considerar curvas apropiadas contenidas en planos perpendiculares a cada uno de los ejes cartesianos y por las propiedades del campo concluimos, usando la fórmula de la parte 1, que el rotor es nulo sobre cada eje, de lo que deducimos que el rotor en cada punto es nulo. Usando la presentación intrínseca de la divergencia se deduce que esta también es nula.