Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2016 (semestre par)

PRÁCTICO 8

1. Sea T el tetraedro limitado por el plano xy, el plano xz, el plano yz y el plano $2x+3y+6z=12$. Calcular

$$\iint_T 3ydxdy + 18zdydz - 12dzdx.$$

2. Sea T el tetraedro del item anterior. Calcular:

$$\iint_T zdxdy + x^2dydz + zdzdx$$

3. Evaluar

$$\iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx$$

donde S es la esfera unidad.

4. Calcular $\omega \wedge \eta$ en los siguientes casos:

   (a) $\omega = xdx + ydy$ y $\eta = xdx - ydy$. (b) $\omega = xdx - ydy$ y $\eta = ydx + xdy$.
   (c) $\omega = 2xdx + ydy$ y $\eta = x^3dx + y^2dy$.
   (d) $\omega = xdx + ydy + zdz$ y $\eta = zdxdy + xdydz + ydzdx$.
   (e) $\omega = xydydz + x^2dxdy$ y $\eta = dx + dz$.
   (f) $\omega = \left(x^2+y^2\right)dx + 2x\,dy$ y $\eta = 2xy\,dx + \left(x^2-y^2\right)dy$.
   (g) $\omega = x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$ y $\eta = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$.
   (h) $\omega = e^{xyz}dxdy$ y $\eta = e^{-xyz}dz$.

5. Sean ω, ω_1, ω_2, ω_3 y ω_4 1-formas en $\mathbb{R}^3$. Probar las siguientes identidades.

   (a) $\omega \wedge \omega = 0$.
   (b) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge (\omega_1 - \omega_2) = -2\omega_1 \wedge \omega_2$.
   (c) $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \wedge (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) = 2(\omega_2 + \omega_4) \wedge (\omega_1 + \omega_3)$.

6. Calcular la derivada exterior $d\omega$ de las siguientes formas:

   (a) $\omega = x$. (b) $\omega = x^2y + y^3$. (c) $\omega = \operatorname{sen}(x^2y)$. (d) $\omega = (x^2+y^3)z^2$.
   (e) $\omega = xydx + (x+y)dy$. (f) $\omega = xydy + (x+y)^2dx$.
   (g) $\omega = xyz\,dx + (xy+yz+zx)dy + (x+y+z)dz$. (h) $\omega = xdxdy + zdydz + ydzdx$.
   (i) $\omega = (x^2+y^2)dydz$. (j) $\omega = (x^2+y^2+z^2)dz$.
   (k) $\omega = xyz\,dydz + x(y+z)dzdx + (xy+z)dxdy$. (l) $\omega = x^2ydydz$.

7. Sea $X = (G,H,F)$ campo vectorial, y sea $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$. Mostrar que

$$d\eta = (\operatorname{div} X)dxdydz.$$

8. Sea $\omega = (x+y)dz + (y+z)dx + (x+z)dy$, y sea S la parte de arriba de la esfera unidad, es decir, los puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$. ∂S es el circulo unidad en el plano xy. Evaluar $\int_{\partial S} \omega$ directamente y usando el Teorema de Stokes.

9. Sea T la superficie triangular acotada por el plano xy, el plano xz, el plano yz y el plano $2x + 3y + 6z = 12$. Calcular

$$\iint_T zdxdy + x^2dydz + ydzdx$$

directamente y por el Teorema de Gauss.

10. Probar que si ω es una forma de clase C^2 entonces $d^2\omega = 0$.

11. Sean ω_1 y ω_2 una k-forma y una l-forma respectivamente. Conjeturar e intentar probar una forma para calcular $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

12. Si las derivadas de dos formas son no nulas y coinciden, puede afirmar algo respecto a la diferencia de ellas? Justifique la respuesta.

13. Dar ejemplos de 1-forma y 2-forma cerradas pero no exactas. Justificar.