Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2016 (semestre par)

PRÁCTICO 6

Área e integral de una función escalar sobre una superficie. Flujo a través de una superficie.

1. Hallar el área de la superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0, \pi]$

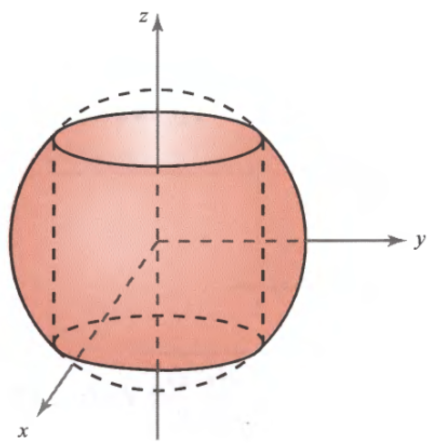
   a) ¿ qué pasa si cambiamos el intervalo de ϕ por $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? ¿ y por $\phi \in [0, 2\pi]$?

   b) ¿ por qué se obtienen respuestas distintas?

2. Sea $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unidad en el plano uv. Hallar el área de $\Phi(D)$.

3. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$ donde $x > 0$, $y \in [-1, 1]$ y $z \in [0, 1]$. Usar la respuesta para expresar el área de la superficie como una integral. No evaluar.

4. Encontrar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

5. 

   Se perfora una bola maciza de radio 2 con un cilindro hueco de radio 1 para formar una junta anular como en la figura. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de esta junta.

6. *a*) Calcular el área del trozo del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, donde R es una constante positiva.

   b) ¿Cuál es el área del trozo de la esfera que está dentro del cono?

7. Calcular la integral $\iint_{\mathcal{S}} f\, dS$ de la función escalar $f(x, y, z) = 2y(x^2+1)^{-1}(1+4z)^{-1/2}$ sobre la superficie

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, |x| < 1, |y| < 1\}$$

8. Sea la función escalar $\varphi(x, y, z) = log(x^2+y^2)$ definida en el abierto $\Omega = \{(x, y, z)$ tal que $x^2 + y^2 \neq 0\}$. Calcular el integral de φ sobre un cilindro (sin tapas) de radio 1 y altura 1.

9. Hallar el flujo del campo vectorial $q\vec{X}/r^3$, siendo q una constante, $\vec{X} = (x, y, z)$, y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a través de la esfera de centro el origen y radio a, con la normal orientada positivamente al exterior. Resp.: $4\pi q$

10. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{X} = (x + y, y^2, y + z)$ sobre el cubo de centro el origen y arista a con normal exterior. Resp.: $2a^3$.

11. Calcular el flujo del vector $xz\vec{i} - y^2\vec{j} + xz\vec{k}$ a través de la superficie lateral del cilindro $x = Rcos(u)$, $y = Rsen(u)$, $z = v$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 < v < 3$ normal orientada al exterior. Resp.: $9\pi R^2/2$.

12. Sea S la superficie cerrada que consta de la semi esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 \leq 1$ y $z = 0$ con la orintación dada por la normal exterior. Sea E el campo eléctrico definido por $E(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Encontrar el flujo eléctrico a través de S.

13. Calcular el flujo del rotor del campo vectorial $X(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$ con la normal orientada tal que forma un ángulo agudo con el eje z.