

PRÁCTICO 5

Superficies paramétricas

1. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica $\Phi(u, v) = (u^2, u \sin e^v, \frac{1}{3}u \cos e^v)$ en el punto $(13, 2, 1)$.

2. Determinar en qué puntos son regulares las siguientes superficies paramétricas:

a) $x = 2u, y = u^2 + v, z = v^2$

b) $x = u^2 - v^2, y = u + v, z = u^2 + 4v$

3. Dada una esfera de radio 2 centrada en el origen, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerando la esfera como:

a) una superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$

b) un conjunto de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

c) la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

4. Encontrar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \sin v, \quad y = u \quad z = \cos v$$

con $v \in [0, 2\pi]$ y $u \in [-1, 3]$. Identificar la superficie.

5. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA Consideremos la esfera de radio 1 en \mathbb{R}^3 , $S^2 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, y la función $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde \mathbb{R}^2 representa el plano xy y $N = (0, 0, 1)$, definido de la siguiente forma: $\pi(x, y, z)$ es punto donde la recta que une N con (x, y, z) , corta al plano xy .

a) Escribir explícitamente el mapa π .

b) Verificar que

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \right)$$

es la inversa de π y que es una parametrización de $S^2 \setminus \{N\}$.

c) ¿Cómo podríamos cubrir toda la esfera con parametrizaciones?

6. Sea la función escalar $\varphi(x, y, z) = \log(x^2 + y^2)$ definida en el abierto $\Omega = \{(x, y, z) \text{ tal que } x^2 + y^2 \neq 0\}$. Calcular el integral de φ sobre un cilindro (sin tapas) de radio 1 y altura 1.

7. Consideremos una placa infinita cargada uniformemente, coincidente con el plano yz de \mathbb{R}^3 , y sea $E(x, y, z) = (\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, 0, 0)$ el campo eléctrico generado por la placa en un punto cualquiera del espacio. Si la densidad de carga de la placa σ es constante, calcular el flujo de campo eléctrico a través de las siguientes superficies (recordar que ϵ_0 es constante):

a) El rectángulo de vértices $(0, 0, 1/2)$, $(1, 0, 1/2)$, $(0, 0, 1)$ y $(1, 0, 1)$.

b) El rectángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

c) $S^2 \cap \{(x, y, z) : x \geq 1\}$.

d) La esfera de centro $(1, 1, 1)$ y radio $1/2$

8. Se considera el recinto limitado por los planos $z = y$ y $z = 0$, y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Hallar el área de la superficie cilíndrica que queda comprendida entre esos dos planos.
9. Se considera la lámina helicoidal parametrizada mediante

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2\sqrt{2}].$$

La densidad de masa por unidad de área de la lámina es $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

- a) Calcular la masa de la lámina.
- b) Hallar el plano tangente a la lámina en el punto $\phi(2, 0)$.
10. Calcular el área de la parte del paraboloides de ecuación $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 9$
11. En cada caso calcular la integral de f sobre la superficie S .
- a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$
- b) $f(x, y, z) = z$, $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$
12. Probar que el área de la superficie de revolución en \mathbb{R}^3 obtenida al girar la gráfica de una función $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$ alrededor del eje z es

$$2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + f'(u)^2} du$$