Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2016 (semestre par).

PRÁCTICO 3

Integrales curvilíneas

1. Mostrar que la integral de $f(x, y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

2. En cada caso, halle la integral de línea $\int_C f\, ds$ de la función escalar f sobre la curva C.

   (a) $f(x, y) = xy$; C la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ orientada en sentido antihorario.

   (b) $f(x, y, z) = (x + y)z$; C la curva $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

3. Calcule las integrales de línea (i) $\int_C 2xy\, dx - x^2\, dy$ y (ii) $\int_C 2xy\, dx + x^2\, dy$ a lo largo de cada una de las siguientes curvas que van del origen $O = (0, 0)$ al punto $A = (2, 1)$.

   (a) Segmento OA. (b) Quebrada OBA, $B = (2, 0)$. (c) Quebrada OCA, $C = (0, 1)$.

   (d) Parábola con eje Oy. (e) Parábola con eje Ox.

4. Calcule $\int y\, dx + z\, dy + x\, dz$ a lo largo de las curvas dadas a continuación. En cada caso la curva se dará como la intersección de dos superficies expresadas en forma implícita.

   (a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z = 2$; $x = y$, desde $(0, 0, 0)$ a $(2, 2, 0)$.

   (b) $x + y = 2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, en sentido horario mirando desde el origen.

   (c) $z = xy$; $x^2 + y^2 = 1$, en sentido antihorario mirando desde $(0, 0, +\infty)$.

5. En cada caso calcule la circulación $\int_C F$ del campo F a lo largo de la curva C.

   (a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy, 2xy - y^2)$; C el arco de la parábola $y = x^2$ que va desde $(1, 1)$ a $(2, 4)$.

   (b) $F(x, y) = (2a - y, x)$; C el primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$, recorrido según t decreciente.

   (c) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$; C el arco de la curva $y = 1 - |1 - x|$ que va de $(0, 0)$ a $(2, 0)$.

   (d) $F(x, y, z) = (2xy, y^2 + z, z^2)$; C el segmento de recta de $(1, 3, 2)$ a $(2, 2, 3)$.

   (e) $F(x, y, z) = (z, x, y)$; C el arco de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$ que va del punto $(1, 0, 0)$ al $(1, 0, 2\pi)$.

6. Consideremos un cable semicircular parametrizado por $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ donde $\alpha(t) = (0, a\sin\theta, a\cos\theta)$, con densidad de masa uniforme de 2g por unidad de longitud.

(a) Cuál es la masa total del cable?

(b) El **centro de masa** de un objeto unidimensional es:

$$\text{centro de masa} = \frac{1}{\int_\alpha \rho(x,y,z)ds}\left(\int_\alpha \rho(x,y,z)xds, \int_\alpha \rho(x,y,z)yds, \int_\alpha \rho(x,y,z)zds\right)$$

donde $\rho(x,y,z)$ es la densidad de masa del objeto. Cuál es el centro de masa de esta configuración de cable?

7. Encontrar la masa de un cable formado por la intersección de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=0$, si la densidad está dada por $\rho(x,y,z)=x^2$ gramos por unidad de longitud.

8. Si F es una fuerza constante, $F=c$, demostrar que el trabajo realizado por F al mover una partícula desde un punto A a un punto B a lo largo de cualquier camino regular a trozos α que una A y B es $c.(B-A)$.

9. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva bajo la acción de un campo de fuerzas F. Si la velocidad de la partícula en el instante t es $v(t)$, su energía cinética está definida por $\frac{1}{2}m\|v(t)\|^2$. Demostrar que la variación de la energía cinética en cualquier intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por F durante dicho intervalo de tiempo. Este resultado recibe el nombre de Principio del trabajo y la energía.

10. Sea α una curva paramétrica C^1.

a) Demostrar que si $\mathbf{X}(\alpha(t))$ es perpendicular a $\alpha'(t)$ para todo t entonces

$$\int_\alpha \mathbf{X}\cdot ds = 0$$

b) Demostrar que si $\mathbf{X}(\alpha(t))$ es paralelo a $\alpha'(t)$ para todo t, es decir $\mathbf{X}(\alpha(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$ con $\lambda(t)>0$, entonces

$$\int_\alpha \mathbf{X}\cdot ds = \int_\alpha \|\mathbf{X}\|ds$$

11. Probar que si $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo C^1, $F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ y $R\subset\mathbb{R}^2$ es un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados, entonces

$$\int_{\partial R} f\,dx + g\,dy = \iint_R (g_x - f_y)\,dx\,dy,$$

donde el borde de R, ∂R, se orienta en sentido antihorario.

12. Considere la integral de línea $\displaystyle\int_C \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy.$

(a) Probar que la integral "no depende del camino", solo de los puntos inicial y final de C.

(b) Calcular la integral para un camino que vaya del punto $(1,1)$ al $(3,2)$.

13. Sean $U=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ y $F\colon U\to\mathbb{R}^2$ el campo $F(x,y) = \left(\dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right).$

(a) Probar que $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ es un potencial escalar de F en U.

(b) Calcular la circulación de F a lo largo de la circunferencia de centro el origen y radio 1, orienta en sentido antihorario.

(c) Hallar la circulación de F a lo largo de la elipse $\alpha(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

14. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo $F(x, y) = (y^2, x^2 - 2xy)$.

(a) Calcular la integral de línea $\int y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$ desde el punto $(1, 0)$ al $(0, 1)$ a lo largo de: (i) el segmento de recta y (ii) el cuarto de cfa. $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Es F un campo de gradientes?

(c) Encuentre ejemplos funciones reales $h(x)$ y $\varphi(x, y)$ tales que $\nabla\varphi(x, y) = h(x)F(x, y)$.