Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2016 (semestre par).

PRÁCTICO 2

Triedro de Frenet

1. Dada una curva paramétrica $\alpha(t)$, la función **longitud de arco**:

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

representa la distancia recorrida desde el instante a hasta el instante t por una partícula que viaja a lo largo de la trayectoria $\alpha(t)$; es decir la longitud de arco desde $\alpha(a)$ a $\alpha(t)$.

Hallar las funciones longitud de arco para las curvas, suponiendo $a = 0$

(a) $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.
(b) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

2. Sea $\alpha(t)$ una curva paramétrica C^∞. Supongamos que $\alpha'(t) \neq 0$. El vector

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

es tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$. Como $\|T(t)\| = 1$, $T(t)$ se denomina **versor tangente**

(a) Demostrar que $T'(t).T(t) = 0$. *Sugerencia:* Derivar $T(t).T(t) = 1$.
(b) Escribir una fórmula para $T'(t)$ en términos de $\alpha(t)$.

3. Una curva $\alpha(s)$ está **parametrizada por longitud de arco** si $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in [a, b]$. Demostrar que si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada por longitud de arco, entonces, la longitud de arco es $\ell(\alpha) = b - a$.

4. La **curvatura** en un punto $\alpha(s)$ de una curva paramétrica cuando está parametrizada por la longitud de arco, se define como

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

Demostrar que $k(s) = \|\alpha''(s)\|$.

5. Si $\alpha(t)$ es una curva parametrizada por un parámetro cualquiera, no necesariamente longitud de arco, y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t, demostrar que

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

(ver ejercicio anterior).

6. Calcular la curvatura de la hélice $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$.

7. Encuentre el radio de curvatura para un punto genérico de las siguientes curvas, hallando los radios máximos y mínimos.

(a) $y = x^2$.

(b) $x = a\cos t,\ y = b\operatorname{sen} t$.

[sol: (a) $\frac{1}{2}(1+4x^2)^{3/2}$, mín: 1/2. (b) $\frac{1}{ab}(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}$, mín y máx: b^2/a y a^2/b.]

8. *Folio de Descartes.* Considere la curva $x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

   Represente gráficamente y pruebe que $x^3 + y^3 = 3axy$ es una ecuación implícita para la curva. ¿Tiene puntos múltiples?

9. Parametrice por la longitud de arco cada una de las siguientes curvas. Calcule la curvatura, torsión y triedro de Frenet en un punto genérico. Halle el plano osculador de β.

   (a) $\alpha(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t, t)$,

   (b) $\beta(t) = (t, t^2/\sqrt{2}, t^3/3)$,

   (c) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cosh t)$.

10. Considere la familia de curvas $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ dada por $\alpha_\lambda(t) = (t^3 + \lambda t^2, 3t^3 - t, 5 - t)$. Determine los valores de λ para los cuales la curva α_λ es plana.

11. Halle la cfa. osculatriz en un punto genérico de la hélice $\gamma(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$; $a, b > 0$.

12. Sean $\gamma = \gamma(t)$ una curva, $\alpha = \alpha(s)$ la reparametrización de γ respecto a la longitud de arco y $s = s(t)$ el cambio de variables tal que $\gamma(t) = \alpha(s(t))$.

    (a) Pruebe que $\dfrac{d\vec{t}}{dt} = k\dot{s}\vec{n}$, donde $\vec{t}$ y $\vec{n}$ son los versores tangente y normal y k la curvatura.

    (b) Pruebe que $\ddot{\gamma} = \ddot{s}\vec{t} + k\dot{s}^2\vec{n}$ y concluya que la aceleración es un vector del plano osculador.

13. Pruebe que si $\alpha(s)$ es una curva de clase C^3, parametrizada por la longitud de arco y $k(s) \neq 0$ entonces $\tau(s) = \dfrac{(\alpha(s)', \alpha(s)'', \alpha'''(s))}{k(s)^2}$. (Sugerencia: de la segunda fórmula de Frenet se deduce que $\tau = \vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds}$.)

14. Analice cómo varían el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de una curva al invertir su orientación.

15. Sea $\mathcal{C}$ una curva en $\mathbb{R}^3$ y defínase $\vec{D} = \tau\vec{t} + k\vec{b}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

    (a) $\vec{n}' = \vec{D} \wedge \vec{n}$.

    (b) $\vec{b}' = \vec{D} \wedge \vec{b}$.

    (c) $\vec{D} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$.