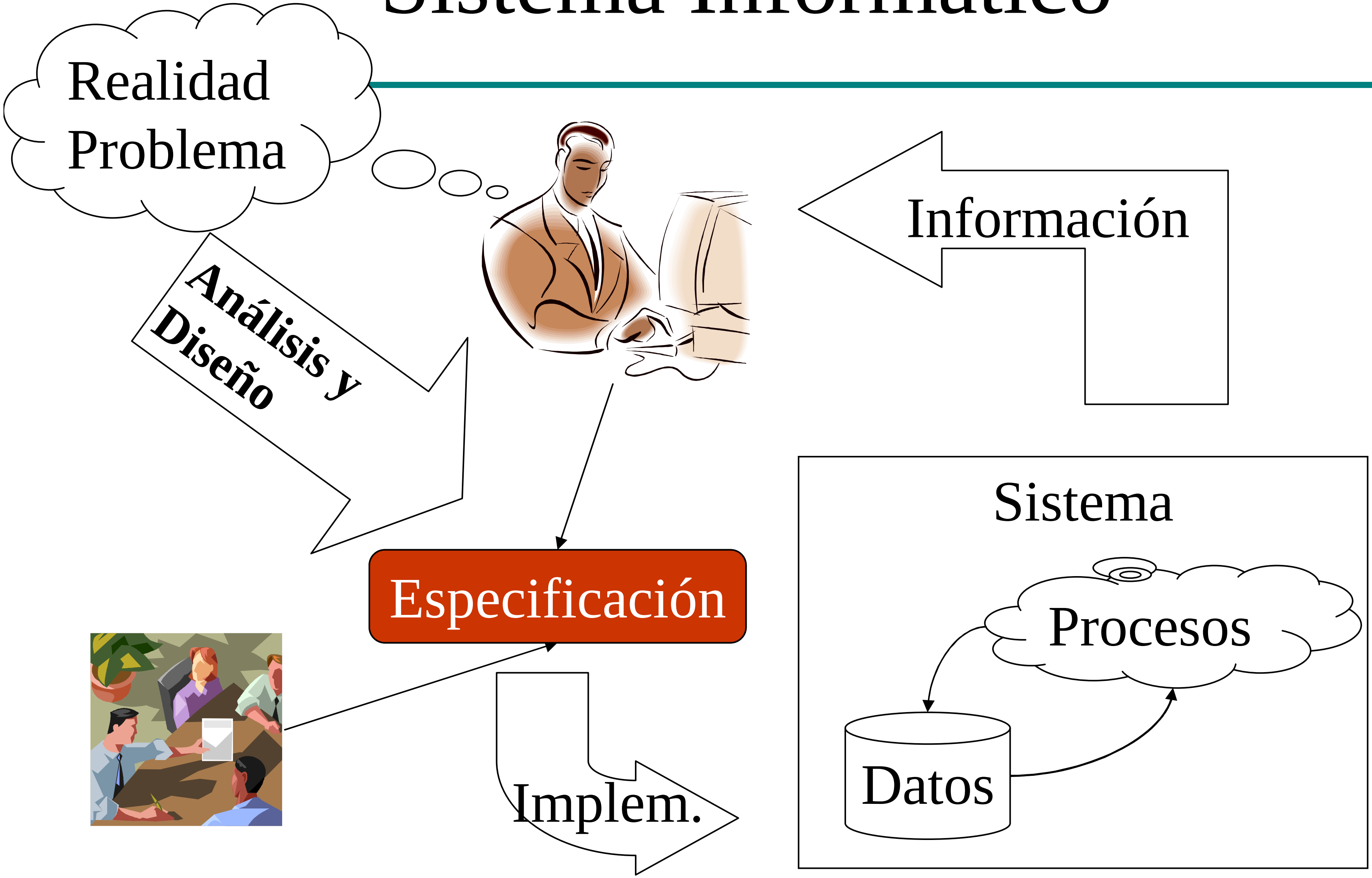
Lógica de Predicados

Motivación

- Un sistema informático no es otra cosa que un **modelo de una parte de la realidad**, típicamente de un servicio.
  - el servicio que debe proveer la bedelía de la facultad o un banco o un supermercado, etc.
- Cómo se construye típicamente este modelo?

Sistema Informático



Especificación

- Documento que refleja el acuerdo entre el usuario y el equipo de desarrollo sobre lo que debe hacer o no un sistema.
- Documento que refleja el acuerdo entre los integrantes del equipo de desarrollo sobre qué representa cada dato y qué debe hacer cada módulo, función, etc.
- Es un modelo donde los objetos que se especificaron se comportan de forma similar a los objetos reales.
- ***Si no se dispone de un mecanismo adecuado para formalizar hasta cierto punto la realidad, no es posible construir un sistema informático que la modele***.

Lenguajes de Especificación

- La especificación debe proveer lo necesario para realizar las tareas básicas que se hacen con ella:
  - Describir el problema sin ambigüedad.
  - Construir una solución adecuada del problema y con un trabajo razonable. **los objetos se comportan como los reales**
  - Verificar la solución que se construyó con respecto a la descripción.
- Dependiendo de la claridad de la definición de la sintaxis y semántica del lenguaje de especificación, ésta será más o menos formal.

Lenguajes de Especificación

- El lenguaje que se usa para construir las especificaciones debe cumplir algunas características, entre ellas:
  - Permitir la referencia a los elementos del problema.
  - Permitir la identificación de diferentes clases de elementos.
  - Poder ser utilizado en diferentes contextos o al menos diferentes problemas.

Prop como Lenguaje de Especificación: El Club Escocés

- Correspondencia
  - Escocés: E
  - Casado: C
  - Sale los Sabados: S
  - Usa Kilt: K
  - Usa Medias Rojas: M
- Reglas para el portero
  - $\neg E \rightarrow M$, $M \rightarrow K$, $C \rightarrow \neg S$, $S \leftrightarrow E$, $K \rightarrow E \wedge C$, $E \rightarrow K$

Prop como Lenguaje de Especificación: Ordenar un Array

- Dado un array de enteros, devolver otro ordenado con los mismos valores.
  - Correspondencia.
    - A es un array: P.
    - El programa (función) Ordenar funciona bien: R.
    - B es la salida de Ordenar: Q.
    - A y B son permutaciones de un mismo array: S.
  - Especificación.
    - $P \land R \land Q \to S$
- Quién garantiza que **A** y **B** están relacionados de alguna forma?

Prop como Lenguaje de Especificación: Conclusiones

- Prop no es un buen lenguaje de especificación ya que sólo permite hacer referencia a las nociones de **verdadero** y **falso**.
- Esto puede tener su contexto de aplicación.
  - Ej. Electrónica Digital
- Para especificar en informática, es necesario hacer referencia a elementos de la realidad.
  - Ej: edades, personas, asignaturas, bolsas de arroz, etc.

Buscando otro Lenguaje

- Pensemos en utilizar el metalenguaje usado en el curso.
  - Qué significa que un array está ordenado?
    - $Ordenado(b) \equiv (\underline{\forall} i : i \in N \text{ y } 1 <= i < (len(b)-1) : b[i] <= b[i+1])$
  - Qué significa que dos arrays tienen los mismos elementos?
    - $TME(a,b) \equiv Incluido(a,b) \text{ y } Incluido(b,a)$
    - $Incluido(a,b) \equiv \underline{\forall} i : i \in N \text{ y } 1 <= i <= len(a):$

      $\underline{\exists} j : j \in N \text{ y } 1 <= j <= len(b) : a[i] = b[j]$

Buscando otro Lenguaje

- Dado que la función pedida tiene que cumplir con las dos condiciones, *f* va a resolver lo pedido si está en el siguiente conjunto:
  - $\{ f \,/\, f\text{: ArrayInt} \rightarrow \text{ArrayInt} \wedge$
    $\forall a{:}a \in \text{ArrayInt: (Ordenado(f(a))}$
    $\wedge \text{TME(a,f(a)))}$
    $\}$
- La especificación representa el conjunto de soluciones al problema.

Especifica o no?

- Eliminación de la ambigüedad?
  – Si, porque a pesar que no es formal dado que sólo son abreviaturas del idioma español, hay un acuerdo con respecto al significado.
- Construir una solución adecuada con un trabajo razonable?
- Si, si somos capaces de construir un elemento del conjunto que se especificó, en algún lenguaje dado, por ejemplo, Módula.
- Referencia a los elementos de la realidad?
  – Si.

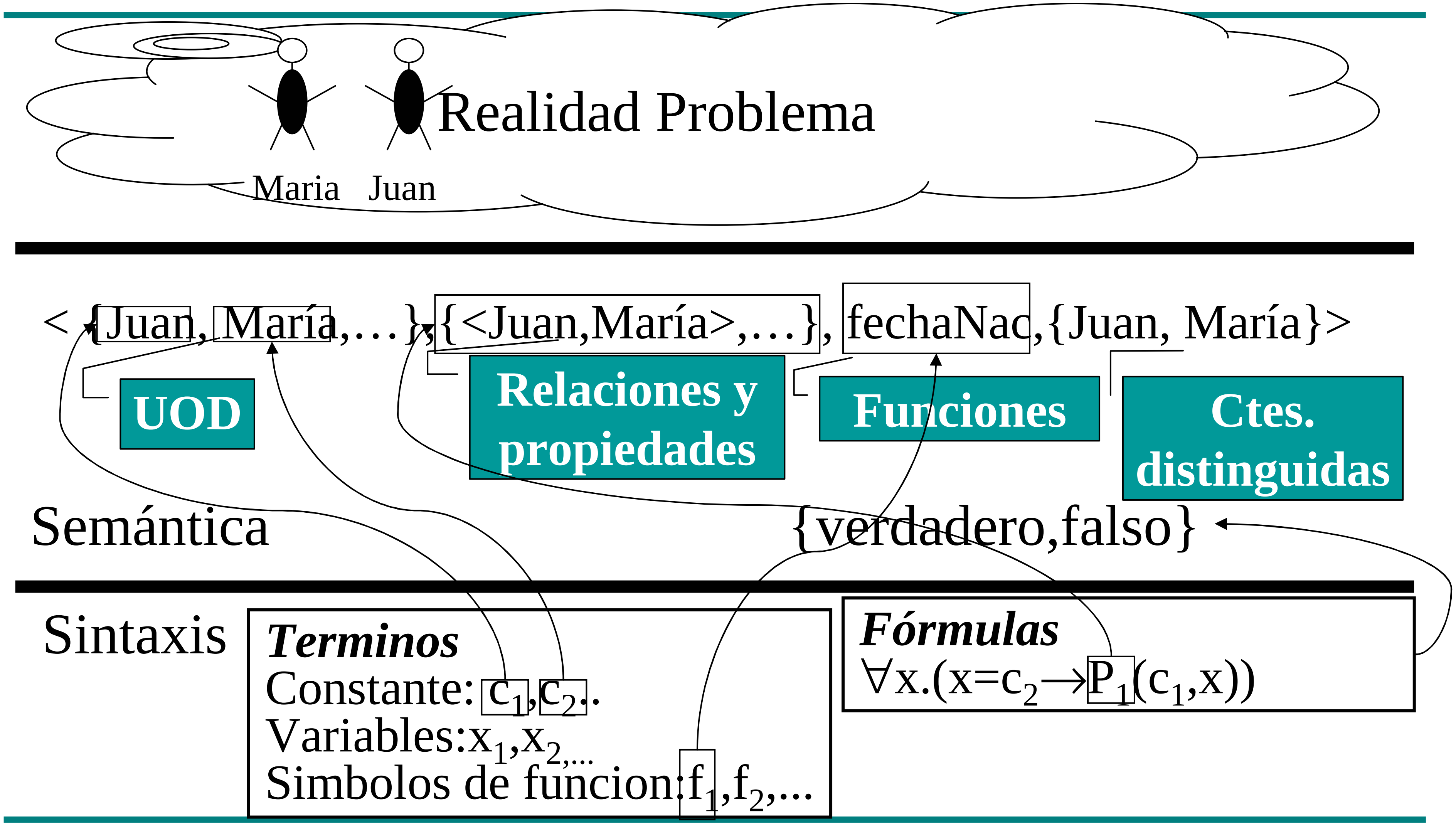
Especifica o No?

- Puede ser utilizado en diferentes contextos o al menos diferentes problemas?
  - Si, lo hemos estado utilizando en todo el curso para diferentes cosas.
- Permite verificar la solución que se construyó con respecto a la descripción?
  - Parece que si... Para hacerlo bien es necesario formalizar mejor el propio lenguaje e incluso su manipulación.
- La idea es construir un sistema similar al de Prop pero para un lenguaje como este.

Análisis e Interpretación del Lenguaje

- En la condición que define al conjunto hay dos tipos de elementos:
  - Unos que referencia a array's o enteros (ej. **a**, **b**, **0**, **len(a)**).
  - Otros que referencian a propiedades o relaciones que deben cumplir esos elementos (ej. **i < len(b)-1**, o **Ordenado(f(a))**).
- Los primeros referencia a elementos de un ***Universo de Discurso (UoD)*** dado
- Los segundos son una forma de expresar ***hechos que pueden ser verdaderos o falsos*** dependiendo de ese universo y la interpretación que se les dé a los símbolos.

Lo que Vendrá



Lo que Vendrá

- Sintaxis de los Lenguajes de Primer Orden.
  - Se definirán los términos y las fórmulas como conjuntos inductivos.
- Semántica de los Lenguajes de Primer Orden.
  - Se definirán formalmente las funciones que hacen la correspondencia de la sintaxis con la semántica y se estudiarán propiedades de esas correspondencias.
- Deducción Natural en Primer Orden.
  - Se definirán reglas que nos permitirán construir derivaciones sin involucrar la semántica.
- Completitud y sus aplicaciones en Primer Orden.
  - Se estudiarán las propiedades de completitud y corrección del sistema definido anteriormente.

Cálculo de Predicados

Cálculo Proposicional

Formalización en PROP:

$\overbrace{\text{Todo natural es entero}}^{p}$

Si $\underbrace{\text{2 es un natural}}_{q}$, entonces $\underbrace{\text{2 es un entero}}_{r}$.

Pero sin embargo: $p \not\models q \rightarrow r$

Necesitamos un formalismo más expresivo

Análisis de Oraciones

- La validez de ciertos razonamientos depende de la relación entre las proposiciones
- Análisis fino de la estructura de las proposiciones

predicado

2 es natural

sujeto

Predicados

« 2 es natural »

En lógica proposicional: p
(una prop. atómica)

En predicados: Natural(2)

Sujeto: 2

Propiedad: Ser Natural

Lenguaje de La Lógica de Predicados

1. Símbolos para denotar objetos
2. Símbolos para denotar propiedades y relaciones
3. Conectivos
4. Cuantificadores

Símbolos para Denotar Objetos

- Símbolos de constante: permiten referirse a objetos determinados
  - Mafalda, 2, π
- Símbolos de variable: permiten referirse a objetos genéricos
  - x, n, α
- Símbolos de función: permiten referirse a operaciones (unarias, binarias, etc.)
  - m+1, 2! , (1+1)!

Símbolos de Predicado

- Permiten representar propiedades y relaciones entre objetos (símbolos unarios, binarios, etc.)
  - Par es un símbolo de propiedad (unario)
  - $\geq$ es un símbolo de relación binario
- Los símbolos de predicado se aplican a objetos para representar afirmaciones simples:
  - Par(2)
  - $x \geq 1$

Conectivos

- Permiten combinar afirmaciones.

- Igual que en lógica proposicional:
  - $\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

  - $Par(2) \wedge x \geq 1$
  - $x \geq 1 \rightarrow \neg \perp$

Cuantificadores

- Cuantifican los objetos genéricos (variables)
  - Cuantificador Universal: $\forall$
  - Cuantificador Existencial: $\exists$
- Ejemplos
  - $(\forall n)\ ((Par(n) \wedge 1 \geq n) \rightarrow n=0)$
  - $(\forall x)\ (\exists y)\ x \geq y$

Ejemplos

- El factorial de todo número es par
  - $(\forall x)\ Par(x!)$
- La suma de dos pares es par
  - $(\forall x)(\forall y)\ (Par(x) \wedge Par(y) \rightarrow Par(x+y))$
- Todo número natural es par o impar
  - $(\forall n)\ (Par(n) \vee Impar(n))$
- Ningún número es a la vez par e impar
  - $\neg(\exists x)\ (Par(x) \wedge Impar(x))$
- Todo número natural par tiene raíz cuadrada
  - $(\forall n)\ (\ Par(n) \rightarrow (\exists m)\ m*m = n)$

Universo de discurso

- En matemática usamos algunas convenciones informales para indicar dominios:
  - naturales: n, m, k
  - reales: x, y, z
  - fórmulas lógicas: α, β, φ
  - Conjuntos de fórmulas: Γ, Δ

- En Lógica de predicados los objetos pertenecen todos a un mismo universo.
  - No hay forma de diferenciar sintácticamente los distintos dominios

Universo de discurso

- Cuando es necesario particionar el universo de discurso en clases de objetos, utilizamos símbolos de propiedad para referenciar los objetos de la subclase:
  - Todo natural es par o impar: $(\forall x)(N(x) \rightarrow Par(x) \vee Impar(x))$

- Si la naturaleza de los objetos de quienes hablamos está sobreentendida (ej. hablamos siempre de fórmulas, naturales, reales, etc.) podemos obviar el símbolo de propiedad respectivo

Símbolos

- ¿Qué determina los símbolos del alfabeto que necesitamos en nuestro lenguaje?
  - Ningún número es par e impar a la vez:

$$\neg(\exists\ x)\ (Par(x) \wedge Impar(x))$$

$$\neg(\exists\ x)\ (Par(x) \wedge \neg Par(x))$$

- La Estructura: depende de la realidad que queremos describir.