Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2016**

Examen – Sábado 4 de febrero de 2017

Número de examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.
- La duración del examen es tres horas.

(I) Verdadero Falso. Total: 20 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**

Ejercicio 1: Si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $N(T) = \{0\}$ entonces T es sobreyectiva.

Ejercicio 2: Todo sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, con $m < n$, es compatible indeterminado.

Ejercicio 3: Las rectas $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ son paralelas.

Ejercicio 4: Si A y B son dos matrices cuadradas tales que $det(A) = det(B)$ entonces A y B son semejantes.

Ejercicio 5: Si $\{u, 2v, 3w\} \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto LI entonces $\{u, v - u, w - u\}$ también es un conjunto LI.

Ejercicio 6: Si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $det(A) = 2$ entonces $det(3A^tA) = 36$.

Ejercicio 7: Sea $T : \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathcal{M}_{3\times 3}$ una transformación lineal. Si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{3\times 3}$ tal que $T(\mathcal{B})$ también es una base de $\mathcal{M}_{3\times 3}$, entonces la matriz asociada ${}_{T(\mathcal{B})}(T)_{\mathcal{B}}$ es la matriz identidad 9×9.

Ejercicio 8: Sean u, v, w vectores en $\mathbb{R}^3$. Si el producto vectorial $u \wedge v$ es ortogonal a w, entonces al menos uno de los vectores u, v es ortogonal a w.

Ejercicio 9: Existen matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tales que $rango(A) < n$, $rango(B) < n$ y $rango(AB) = n$.

Ejercicio 10: La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$, cumple $N(T) = Im(T)$.

(II) Desarrollo. Total: 80 puntos

Ejercicio 1: (20 puntos)

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -\alpha+1 & 0 & \alpha \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Halle el valor o los valores de α para los cuales A **no** es invertible.

Solución: A no es invertible si $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Para $\alpha = 1$ la inversa de A es:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2: (30 puntos)

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V, tales que $V = S_1 + S_2$.

a) Pruebe que $V = S_1 \oplus S_2$ si y sólo si $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Solución: Ver Teórico.

Considere ahora $V = \mathcal{P}_3$, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Sean los subespacios $S_1 = [x^3+1]$ y $S_2 = \{p \in V : \; p'(0) = p(0)\}$.

b) Halle $S_1 + S_2$.

Solución: $\mathcal{B}_1 = \{x^3+1\}$ es base de S_1. Por otra parte, $\mathcal{B}_2 = \{x^3, x^2, x+1\}$ es base de S_2. De donde resulta que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{x^3+1, x^3, x^2, x+1\}$ es un generador de $S_1 + S_2$, y por ser un conjunto LI es también una base.

c) ¿Es $S_1 + S_2$ una suma directa?

Solución: Como $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de $S_1 + S_2$, se deduce que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, y por lo tanto $S_1 + S_2$ es suma directa. Además se cumple $S_1 \oplus S_2 = \mathcal{P}_3$.

Ejercicio 3: (30 puntos)

Considere la siguiente transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Considere además los subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 2}$:

$$V_1 = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \; T(M) = M\} \;,\; V_2 = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \; T(M) = -M\}.$$

a) Pruebe que V_1 y V_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Solución:

- $T(0) = 0 \Rightarrow 0 \in V_1$ ($V_1 \neq \emptyset$).
- $M_1, M_2 \in V_1$. Se cumple $T(M_1 + M_2) = T(M_1) + T(M_2) = M_1 + M_2$. Por lo tanto $M_1 + M_2 \in V_1$.
- $M \in V_1, \alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple $T(\alpha M) = \alpha T(M) = \alpha M$. Por lo tanto $\alpha M \in V_1$.

De manera que V_1 es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
Análogamente:

- $T(0) = -0 \Rightarrow 0 \in V_2$ ($V_2 \neq \emptyset$).
- $M_1, M_2 \in V_2$. Se cumple $T(M_1 + M_2) = T(M_1) + T(M_2) = -M_1 - M_2 = -(M_1 + M_2)$. Por lo tanto $M_1 + M_2 \in V_2$.
- $M \in V_2, \alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple $T(\alpha M) = \alpha T(M) = -\alpha M$. Por lo tanto $\alpha M \in V_2$.

Y entonces V_2 también es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

b) Halle una base de V_1 y una base de V_2.

Solución: $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V_1 y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V_2.

Considere ahora una segunda transformación lineal $S : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_3$ definida por:

$$S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^3 - x,\ \ S\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^3 - x,\ \ S\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - 1,\ \ S\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x^2 + 1.$$

c) Obtenga una base de $N(S \circ T)$. ¿Coincide $N(S \circ T)$ con alguno de los subespacios V_1 o V_2 definidos arriba?

Solución: Se cumple, para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$: $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (\alpha + \delta)(x^3 - x) + (\beta - \gamma)(x^2 - 1)$. De donde resulta la composición:

$$(S \circ T)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d)(x^3 - x) + (b - c)(x^2 - 1).$$

Por lo tanto los elementos de $N(S \circ T)$ son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, así que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $N(S \circ T)$. Además $N(S \circ T) = V_2$.

d) Obtenga $Im(S \circ T)$.

Solución: $Im(S \circ T) = [x^3 - x, x^2 - 1]$.

Considere finalmente la base $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, y la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3$.

e) Halle la matriz asociada ${}_{\mathcal{B}}(S \circ T)_{\mathcal{A}}$.

Solución: ${}_{\mathcal{B}}(S \circ T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.