INSTITUTO DE INGENIERIA ELECTRICA - Departamento de POTENCIA

52101418

Examen de: **MAQUINAS ELECTRICAS I (Planes 1991 y 1987)**
MAQUINAS ELECTRICAS (Plan 1974)
CONVERSION ELECTROMECANICA (Opc. Plan 1991)

24 de Febrero 2000

Problema Nº1

Se tiene un motor de inducción trifásico, de rotor de jaula y con los seis bornes del estator accesibles, cuyos demás datos se indica a continuación, que debe ser alimentado desde una barra trifásica de 220 V, 50 Hz (que puede considerarse de potencia infinita para el motor) mediante un cable trifásico de 200 metros de longitud.

Datos:

Motor: Valores nominales: 220 V, 50 Hz, 4 polos, conectado en triángulo.

Se efectuaron los siguientes ensayos a frecuencia nominal y con el motor conectado en triángulo:

Ensayo en vacío: 220 V, 3 A, Potencia consumida insignificante.

Ensayo en c.c. a rotor bloqueado: 66 V, 14.76 A, 588 W. En este ensayo puede considerarse despreciable la corriente magnetizante.

Alimentando en continua entre dos bornes del estator, se midió una corriente de 10 A para una tensión de 10 V.

De los datos del fabricante se sabe que el momento de inercia del rotor es de 0.15 kg×m^2.

Cable: Rc = 0.001 Ω/m
Xc = 0.004 Ω/m (Rc y Xc por fase, medidos a 50 Hz)

Se pide:

1) Mostrar que con un arrancador estrella-triángulo conectado en los bornes del motor, se consigue que en el instante del arranque la caída de tensión en bornes del motor sea aproximadamente 10% de la tensión nominal, calculando la tensión que efectivamente se obtiene.

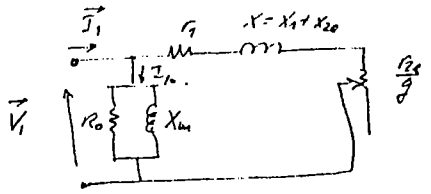
2) El cambio del conexionado de estrella a triángulo se realiza en ese arrancador mediante un contactor accionado centrífugamente, y se puede regular la velocidad a la que se realiza el cambio. Determinar la mínima velocidad a la que debe regularse dicho cambio de estrella a triángulo, para que durante un arranque en vacío, la tensión en bornes del motor nunca sea inferior a la calculada en 1).

3) Calcular el tiempo de arranque en vacío hasta el 99% de la velocidad de sincronismo.

Problema Nº2. Solución propuesta:

Previo: Identificación de los parámetros del circuito equivalente del motor

Circuito equivalente: (en Y equiv, para funcionamiento en Δ).



$$V_1 = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ V}$$

Ensayo en vacío: $V_{10} = 220$ V, $I_{10} = 3$ A, $P_{10} = 0 \Rightarrow \boxed{R_0 = \infty}$

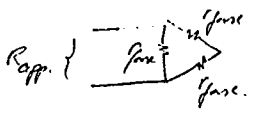
$$X_m = \frac{220\text{ V}}{\sqrt{3}\cdot 3\text{ A}} = 42{,}339\ \Omega$$

Ensayo en c.c. a r.b.: (Método aproximado: despreciando I_{1cc}).

$$P_{1cc} = 3(r_1 + r_{2e}) I_{1cc}^2 \rightarrow (r_1 + r_{2e}) = \frac{P_{1cc}}{3 I_{1cc}^2} = \frac{588}{3\cdot(14.76)^2} = 0{,}8997 = 0{,}900\ \Omega$$

$$(r_1 + r_{2e})^2 + X^2 = \frac{V_{1cc}^2}{I_{1cc}^2} \Rightarrow X = \sqrt{\left(\frac{U_{1cc}}{\sqrt{3}\, I_{1cc}}\right)^2 - (r_1 + r_{2e})^2} = 2.4198\ \Omega = 2.420\ \Omega$$

r_1 medida con corriente, en Δ, cuyo bobinado



$$R_{app} = \frac{10\text{ V}}{10\text{ A}} = 1\ \Omega$$

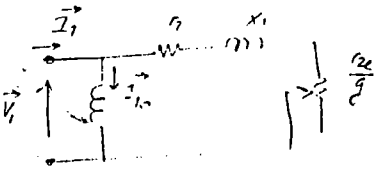
$$R_{app} = r_{fase} \,//\, (2\, r_{fase}) = \frac{2\, r_{fase}^2}{3\, r_{fase}} = \frac{2}{3}\, r_{fase}$$

$$r_1\ (Y\ \text{equiv}) = \frac{1}{3}\, r_{fase} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} R_{app}\right) = 0{,}5\ \Omega$$

$$\Rightarrow r_{2e} = 0{,}900\ \Omega - 0{,}5 = 0{,}4\ \Omega$$

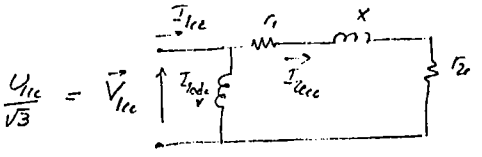
Parámetros del circuito equiv. (en Y equiv):

$$\boxed{\begin{aligned} r_1 &= 0{,}5\ \Omega \\ r_{2e} &= 0{,}4\ \Omega \\ X &= 2{,}42\ \Omega \\ X_m &= 42{,}34\ \Omega \end{aligned}}$$



DEPARTAMENTO DE FAC. INGENIERIA DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA

Cálculo sin despreciar I_{1cc}:



$$P_{1cc} = 3(r_1 + r_{2e}) I_{1cc}^2$$

$$\vec{V}_{1cc} = \frac{66/\sqrt{3}}{} \angle 0^\circ = 38{,}11\text{ V} \angle 0^\circ$$

$$\vec{I}_{10cc} = \frac{\vec{V}_{1cc}}{jX_m} = \frac{\frac{66}{\sqrt{3}}}{42{,}34 \angle -90^\circ} = 0{,}9\text{ A} \angle -90^\circ$$

$$\cos\varphi_{1cc} = \frac{P_{1cc}}{\sqrt{3}\, U_{1cc}\cdot I_{1cc}} = \frac{588}{\sqrt{3}\times 66 \times 14.76} = 0{,}3485$$

$$\varphi_{1cc} = 69^\circ{,}605$$

$$\vec{I}_{1cc} = \vec{I}_{1occ} + \vec{I}_{2ecc} \Rightarrow \vec{I}_{2ecc} = \vec{I}_{1cc} - \vec{I}_{1occ} = 14.76\angle -69°,605 - 0,9\angle -90° =$$

$$\vec{I}_{2ecc} = (5,144 - j\,13.835) - (0 - j\,0,9) = 13,92\,A\angle -68°,31$$

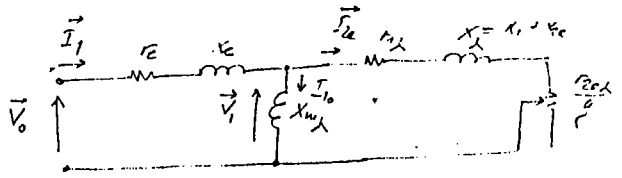
$$(r_1 + r_{2e}) = \frac{588\ W}{3 \cdot 13,92^2\,A^2} = 1,011\ \Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{2e} = 0,511\ \Omega}$$

$$\boxed{X = \sqrt{\left(\frac{66}{\sqrt{3} \cdot 13.92}\right)^2 - 1,011^2} = 2,544\ \Omega}$$

---

1). Arranque en Y. (Bajo 220 V entre fases).



$r_e = 200 \cdot 0,001 = 0,2\ \Omega$

$x_e = 200 \cdot 0,004 = 0,8\ \Omega$

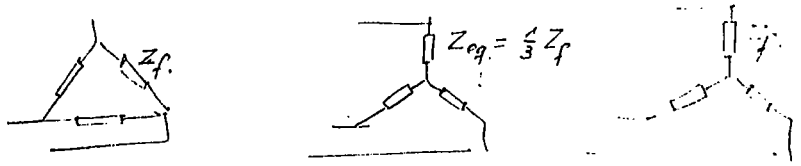
$r_Y = 3\,r_1 = 3 \cdot 0,5 = 1,5\ \Omega$

$r_{2eY} = 3\,r_{2e} = 3 \cdot 0,4 = 1,2\ \Omega$

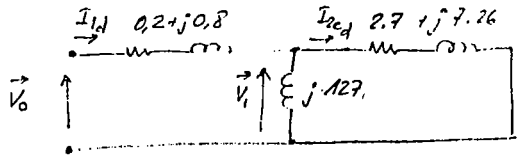
$X_Y = 3X = 3 \cdot 2,42 = 7.26\ \Omega$

$X_{mY} = 3\,X_m = 3 \cdot 42,34 = 127\ \Omega.$

Motor real — Motor en Y equiv. (pero conectado en Δ) — Motor en Y durante el arranque



En el instante del arranque:



$$\vec{V}_0 = \vec{V}_1 + (r_e + j x_e)\vec{I}_{1d}$$

$$0 = [(r_Y + r_{2eY}) + j\,X_Y]\,\vec{I}_{2ed} - \vec{V}_1$$

$$\vec{V}_1 = j\,X_{mY}(\vec{I}_{1d} - \vec{I}_{2ed})$$

$$\vec{V}_0 = [r_e + j(x_e + x_{mY})]\,\vec{I}_{1d} - j\,x_{mY}\vec{I}_{2ed}$$

$$0 = -j\,x_m\vec{I}_{1d} + [(r_Y + r_{2eY}) + j(x_{mY} + X_Y)]\,\vec{I}_{2ed}$$

$$\begin{bmatrix} 0,2 + j\,127,8 & -j\,127 \\ -j\,127 & 2,7 + j\,134,26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{1d} \\ \vec{I}_{2ed} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127 + j\,0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DEPARTAMENTO DE FAC. INGENIERIA DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA

$$\Delta = (0,2 + j\,127,8)(2.7 + j\,134,26) + 127^2 = -1028,888 + j\,371,912 = 1094,043\angle 160°,127$$

$$\boxed{\vec{I}_{1d} = 127\,\frac{2.7 + j\,134,26}{\Delta} = 127\,\frac{134,287\angle 88,85}{1094,043\angle 160°,127} = 15,588\angle -71,279}$$

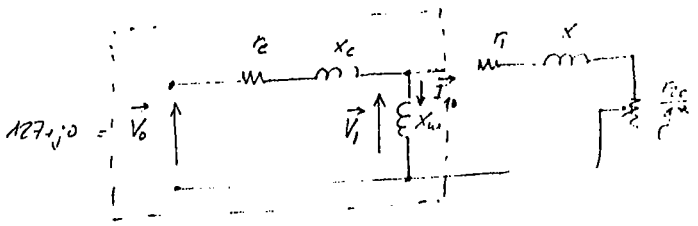
$$\boxed{\vec{V}_{1d} = \vec{V}_0 - (0,2 + j\,0,8)(15,588\angle 71°,279) = 127 + j\,0 - (12,81 + j\,1,05) = 114,2\angle -0°,53}$$

$0,8246\angle 75°,964$

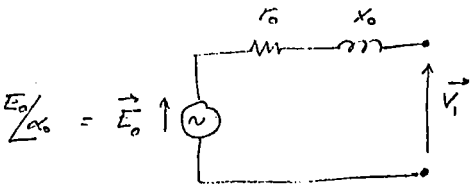
$$\boxed{V_{1d} = 114,2\ V}$$

$\Delta V = 127 - 114,2 = 12,8\ V$

2). En el momento del cambio a Δ, debe ser g^* tal que: $\boxed{|\vec{V}_1| = 114{,}2\ V}$.



Equivalente de Thévenin:



$$r_0 + j x_0 = (r_c + j x_c) // j x_m = \frac{-x_m x_c + j r_c x_m}{r_c + j(x_c + x_m)}$$

$$r_0 + j x_0 = \frac{-33.872 + j\,8{,}468}{0{,}2 + j\,43{,}14} = \frac{34{,}914\angle 165{,}96}{43{,}14\angle 89{,}73} = 0{,}809\angle 76{,}23$$

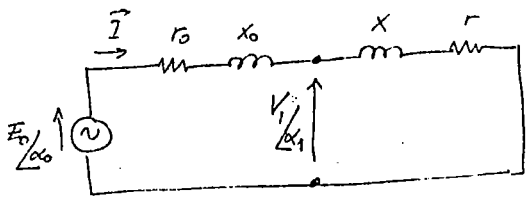
$$\boxed{r_0 + j x_0 = 0{,}1926 + j\,0{,}7861\ \Omega}$$

$$\vec{E}_0 = \vec{V}_{1_0} = j x_m \vec{I}_{1_0}$$

$$\vec{I}_{1_0} = \frac{\vec{V}_0}{r_c + j(x_c + x_m)} \Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{j x_m}{r_c + j(x_c + x_m)} \vec{V}_0 = \left(\frac{j\,42{,}34}{0{,}2 + j\,43{,}14}\right) 127\angle 0$$

$$\boxed{\vec{E}_0 = 124{,}644\ V \angle 0{,}2656^\circ}$$

El problema es ahora determinar r tal que $|\vec{V}_1| = 114{,}2\ V$ = dato.



(1) $|\vec{V}_1| = \left(\sqrt{x^2 + r^2}\right) |\vec{I}|$

(2) $|\vec{I}_1| = \dfrac{E_0}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{|\vec{V}_1|}{E_0}\right)^2 = \frac{r^2 + x^2}{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2} \qquad \left(\frac{|\vec{V}_1|}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{114{,}2}{124{,}644}\right)^2 = 0{,}83945$$

$$r_0^2 + r^2 + 2 r_0 r + (x_0 + x)^2 = \frac{1}{0{,}83945}(r^2 + x^2)$$

$$r^2\left(1 - \frac{1}{0{,}83945}\right) + 2 r_0 r + r_0^2 + (x_0 + x)^2 - \frac{x^2}{0{,}83945} = 0$$

$$\boxed{-0{,}19126\, r^2 + 0{,}3852\, r + 3{,}33966 = 0}$$

$r_1 = -3{,}291 < 0$ no es admisible.

$$\boxed{r_2 = 5{,}3053}$$

$$r_2 = r_1 + \frac{r_c}{g^*}$$

$$\Rightarrow \boxed{g^* = \frac{0{,}4}{5{,}3053 - 0{,}5} = 0{,}08324} \Rightarrow \boxed{n^* = 1500(1 - g^*) = 1375\ rpm}$$

DEPARTAMENTO DE DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
FAC. INGENIERIA

3) <u>Cálculo del tiempo de arranque.</u> (Arranque en vacío) hasta $g = 0{,}01$

$$J\frac{d\Omega}{dt} = C_m - \underset{0}{\cancel{C_r}} \qquad \begin{cases} \Omega = \Omega_s(1-g) \\ C_m = \frac{1}{\Omega_s}\frac{3 r_{2e}}{g} I_{2e}^2 \end{cases}$$

$$-J\Omega_s \frac{dg}{dt} = \frac{1}{\Omega_s}\frac{3 r_{2e}}{g} I_{2e}^2$$

$$-J\Omega_s^2 \frac{g\,dg}{3 r_{2e} I_{2e}^2} = dt.$$

$$T = \text{tiempo de arranque} = -J\Omega_s^2 \int_{g=1}^{g=0{,}01} \frac{g\,dg}{3 r_{2e}(I_{2e}(g))^2}$$

$$T = T_1 + T_2 \quad , \text{ con } \begin{cases} T_1 = -J\Omega_s^2 \int_{g=1}^{g^*} \frac{g\,dg}{3 r_{2e_\lambda}(I_{2e_\lambda}(g))^2} \\ T_2 = -J\Omega_s^2 \int_{g^*}^{g=0{,}01} \frac{g\,dg}{3 r_{2e}(I_{2e}(g))^2} \end{cases}$$

<u>Previo:</u> equivalente de Thévenin en conexionado λ.

$r_c = 0{,}2$

$x_c = 0{,}8$

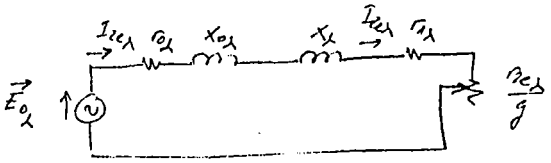
$x_{m_\lambda} = 127\ \Omega$

$$r_{o_\lambda} + j x_{o_\lambda} = \frac{-x_{m_\lambda} x_c + j\, r_c x_{m_\lambda}}{r_c + j(x_c + x_{m_\lambda})} = \frac{-101.6 + j25.4}{0{,}2 + j127{,}6} = \frac{104.727\angle 165{,}96}{127{,}8\angle 89{,}91} = 0{,}819\angle 76{,}05$$

$$\boxed{r_{o_\lambda} + j x_{o_\lambda} = 0{,}1975 + j\,0{,}7953}$$

$$\boxed{\vec{E}_{o_\lambda} = \left(\frac{j127}{0{,}2 + j127{,}8}\right) 127\angle 0 = 126{,}205\angle 0{,}090}$$

DEPARTAMENTO DE FAC. INGENIERIA DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA



$$I_{2e}^2(g) = \frac{E_{o_\lambda}^2}{\left(r_{o_\lambda} + r_\lambda + \frac{r_{2e_\lambda}}{g}\right)^2 + (x_{o_\lambda} + x_\lambda)^2}$$

$$\boxed{T_1 = -J\Omega_s^2 \cdot \frac{1}{3 r_{2e_\lambda}} \frac{1}{E_{o_\lambda}^2} \int_{g=1}^{g^*} g\left[\left(r_{o_\lambda} + r_\lambda + \frac{r_{2e_\lambda}}{g}\right)^2 + (x_{o_\lambda} + x_\lambda)^2\right] dg}$$

$$T_1 = J.\Omega_s^2 \cdot \frac{1}{3 r_{m\lambda}} \cdot \frac{1}{E_{m\lambda}^2} \underbrace{\int_{g^*}^{g=1} g\left[\left(1{,}6975 + \frac{1{,}2}{g}\right)^2 + 64{,}888\right] dg}_{I}$$

$$I = \int_{g^*}^{g=1} \frac{1.44}{g}\, dg + \int_{g^*}^{g=1} 4.074\, dg + \int_{g^*}^{g=1} 67{,}7695\, g\, dg$$

$$I = 1.44 \ln\left(\frac{1}{0{,}08324}\right) + 4.074\,(1 - 0{,}08324) + \frac{67{,}7695}{2}\,(1 - 0{,}08324^2)$$

$$I = 3{,}5799 + 3{,}7349 + 33{,}650 = 40{,}9647$$

$$\boxed{T_1 = 0{,}15 \cdot \left(\frac{1500 \cdot \pi}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 1{,}2} \cdot \frac{1}{126{,}205^2} \cdot 40{,}9647 = 2{,}644 \text{ s.}}$$

$$T_2 = J.\Omega_s^2 \cdot \frac{1}{3 r_e} \cdot \frac{1}{E_o^2} \underbrace{\int_{0{,}01}^{0{,}08324} g\left[\left(r_o + r_1 + \frac{r_2}{g}\right)^2 + (x_o + x)^2\right] dg}_{\underbrace{\int_{0{,}01}^{0{,}08324} g\left[\left(0{,}6926 + \frac{0{,}4}{g}\right)^2 + 10{,}279\right] dg}_{= I}}$$

$$I = \int_{g=0{,}01}^{g^*} \frac{0{,}16}{g}\, dg + \int_{g=0{,}01}^{g^*} 0{,}55408\, dg + \int_{g=0{,}01}^{g^*} 10{,}759\, g\, dg$$

$$I = 0{,}339 + 0{,}0406 + 0{,}0367 = 0{,}4164$$

$$\boxed{T_2 = 0{,}15 \left(\frac{1500\,\pi}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 0{,}4} \cdot \frac{1}{124{,}644^2} \cdot 0{,}4164 = 0{,}0827}$$

$$\boxed{T = T_1 + T_2 = 2.727 \text{ s.}}$$

$$\boxed{T = 2.7 \text{ segundos}}$$

DEPARTAMENTO
FAC. INGENIERI
DOCUMENTACION Y BI