Muestreo y Procesamiento Digital
ParExamen / Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

7 de marzo de 2003

Para aprobar el curso hay que obtener al menos 25 puntos.

La asignatura se aprueba cumpliendo con todos los siguientes requisitos:

- **La pregunta esencialmente correcta.**
- **Un problema esencialmente correcto.**
- **Obtener al menos 60 puntos.**

Indicaciones:

- El ParExamen tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones

Pregunta [20 pts.]

1. [5 pts.] Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad de sistemas en tiempo discrteto lineales invariantes en el tiempo.

   Solución: La condición necesaria y suficiente para que un filtro digital con respuesta al impulso $h[n]$ sea estable, es que la norma 1 de la respuesta sea acotada: $\sum_n |h[n]| < \infty$.

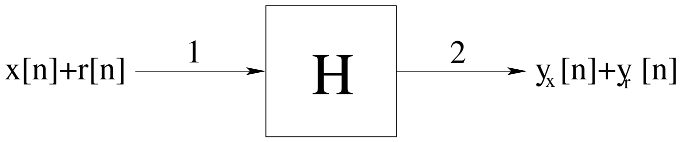
2. [15 pts.] Demostrar únicamente que la condición es necesaria.

   Solución: Hay que demostrar que si no se cumple la condición, el filtro no es estable. O lo que es lo mismo, que si el filtro es estable, entonces vale la condición. Esto último se demuestra fácilmente: sea un filtro estable. Elijo como entrada $x[n] = \text{sg}(h[-n])$ o 0 si $h[-n] = 0$. Entonces, $y[0] = \sum_n h[n]\text{sg}(h[+n]) = \sum_n |h[n]|$.

   Como el filtro es estable por hipótesis, $y[0]$ debe ser finito, y por lo tanto vale la condición.

Problema 1 [40 pts.]

Se desea mejorar la relación señal a ruido con que llega una señal. La señal original $x[n]$ viene contaminada con ruido aditivo $r[n]$. Se propone procesar la señal mediante un filtro H:



La señal y el ruido se pueden modelar de la siguiente forma:

$$x[n] = \frac{1}{2}(a[n] + a[n-1])$$

$$r[n] = A \cdot (0.7\, b[n] - 0.3\, b[n-1])$$

donde $a[n]$ y $b[n]$ son procesos IID, con valor esperado 0 y potencia 1.

1. [8 pts.] Calcular la relación señal a ruido en el punto 1, en función de A. Evaluar para el caso $A = 0.1$.

   Solución: $x[n]$ se modela como un proceso blanco a través de un filtro $H_x(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$. Por lo tanto, $G_x(e^{j\theta}) = 1 \cdot |H_x(e^{j\theta})|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, y aplicando Parseval, la potencia de señal será $0,5$.

   Igualmente para el ruido, el filtro en cuestión es $H_r(z) = A(0.7 - 0.3z^{-1})$. Se llega a $G_r(e^{j\theta}) = 1 \cdot |H_r(e^{j\theta})|^2 = A^2(0,58 - 0,42\cos\theta)$. La potencia de ruido será entonces $0,58\, A^2$.

   La SNR_1 será $\frac{0,5}{0,58\, A^2}$. Para $A = 0,1$ vale $SNR_1 = 86,2 = 19,4$dB.

2. [8 pts.] Si el filtro H es un pasabajos ideal, calcular en función de A y de la frecuencia de corte θ_c, la SNR en el punto 2. Evaluar para el caso $A = 0.1$, y $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$.

   Solución: En este caso, para averiguar las potencias, habrá que integrar las densidades espectrales entre $\theta = 0$ y θ_c, la frecuencia de corte. Esto da:

   $$SNR_2 = \frac{0,5(\theta_c + \sin\theta_c)}{A^2(0,58\theta_c - 0,42\sin\theta_c)}$$

   En el caso particular, vale $SNR_2 = 173,9 = 22,4$dB.

3. [6 pts.] Calcular la respuesta al impulso del pasabajos con $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$.

   Solución: De la tabla de transformadas, la respuesta impulsiva será $h[n] = \frac{\theta_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{\theta_c n}{\pi})$. Para $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$, queda $h[n] = \frac{2}{3}\mathrm{sinc}\frac{2n}{3}$

4. [10 pts.] Comente detalladamente cómo obtener una buena aproximación realizable para este filtro ideal. Comentar sobre ventajas y desventajas del método elegido con respecto a otros métodos. Comentar sobre criterios para elegir el orden del filtro resultante, y en caso que corresponda, la elección de ventanas.

   Solución: Ver teórico. Una posibilidad para obtener un filtro de bajo orden y sin oscilaciones de Gibbs ni fluctuaciones en la banda de paso puede ser un filtro de Chebyshev mediante el método de transformación bilineal. De esta forma se obtiene una buena pendiente en la frecuencia de corte, y las fluctuaciones se dejan en la banda de corte únicamente. Como para esta aplicación no es muy crítico el orden del filtro, un orden bajo alrededor de 4 o 6 estaría bien.

   Otras respuestas posibles: diseñar un filtro transversal mediante traslación y ventanas. Hay que mencionar el retardo introducido y las ventajas de la ventana elegida. El orden tiene que ser suficiente como para no introducir oscilaciones de Gibbs importantes en la respuesta frecuencial, y tener una pendiente razonable en la frecuencia de corte.

5. [8 pts.] Si el filtro H es un filtro transversal de respuesta impulsiva $\delta[n] + \alpha\delta[n-1]$, calcular, para $A = 0,1$, el parámetro α que minimice el error cuadrático medio entre la señal de entrada y salida:

$$\varepsilon^2 = \mathbb{E}\{(y[n] - x[n])^2\}$$

Nota: recordar que la salida $y[n]$ incluye componentes de señal y de ruido.

Solución:

$$y[n] - x[n] = \alpha x[n-1] + r[n] + \alpha r[n-1]$$
$$= \alpha(a[n-1]/2 + a[n-2]/2) + 0,7Ab[n] - 0,3Ab[n-1] + \alpha A(0,7b[n-1] - 0,3b[n-2])$$
$$= \alpha(a[n-1]/2 + a[n-2]/2) + 0,7Ab[n] + A(0,7\alpha - 0,3)b[n-1] - 0,3\alpha Ab[n-2]$$
$$\mathbb{E}\{(y[n] - x[n])^2\} = \alpha^2/2 + 0,7^2A^2 + (0,7\alpha - 0,3)^2A^2 + 0,3^2A^2\alpha^2$$

Derivando con respecto a α, queda:

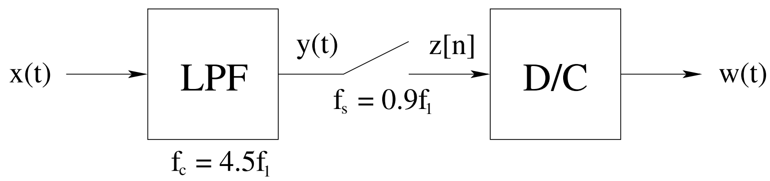
$$d\mathbb{E}/d\alpha = \alpha(1 + 1,16A^2) - 0,42A^2$$

Sustituyendo el valor de A e igualando a 0 para hallar el mínimo:

$$\alpha = \frac{0,42}{100 + 1,16} = 0,004$$

Problema 2 [40 pts.]

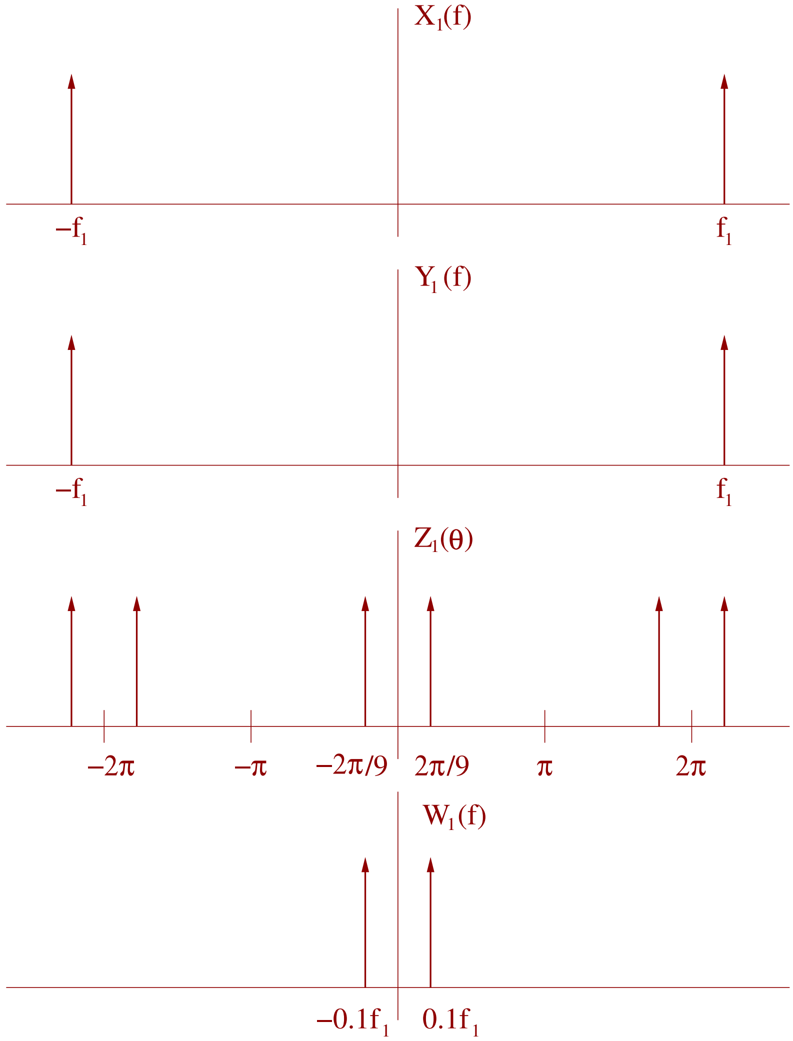
En este problema se estudiará un sistema utilizado en osciloscopios para analizar señales periódicas de frecuencias mayores a las que puede manejar la electrónica utilizada. El sistema propuesto es:



donde $x(t)$ es una señal periódica de período $T_1 = 1/f_1$; f_c es la frecuencia de corte del filtro pasabajos; f_s es la frecuencia de muestreo; y el bloque D/C es un reconstructor ideal. Se asumirá, para simplificar, que no hay ruido sumado a la señal.

1. [8 pts.] Bosqueje los espectros de $x(t)$, $y(t)$, $z[n]$ y $w(t)$ cuando $x(t) = x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$. Indique como queda $w(t)$ en el tiempo.

Solución:



Antitransformando $W_1(f)$ encontramos $w_1(t)$

$$w(t) = \cos(2\pi 0.1 f_1 t)$$

2. [8 pts.] Encuentre el espectro de $x_2(t) = \sum_k \Lambda\left(\frac{t-kT_1}{T_1/2}\right)$.
Sugerencia: expresar $x_2(t)$ *como* $\Lambda\left(\frac{t}{T_1/2}\right) * \sum_k \delta(t-kT_1)$

Solución:

$$x_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T_1/2}\right) * \sum_k \delta(t-kT_1)$$

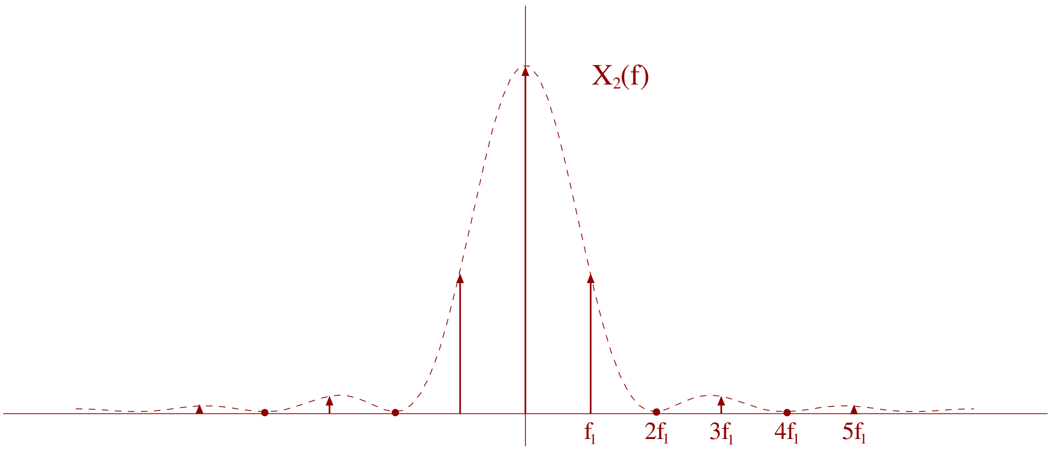
Aplicando la transformada de Fourier obtenemos:

$$\frac{T_1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T_1}{2}f\right) \cdot \frac{1}{T_1}\sum_k \delta\left(f-\frac{k}{T_1}\right)$$

Por lo tanto,

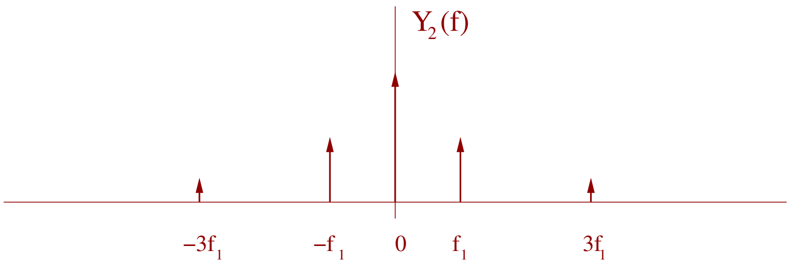
$$X_2(f) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{2f_1}\right) \cdot \sum_k \delta(f-kf_1)$$

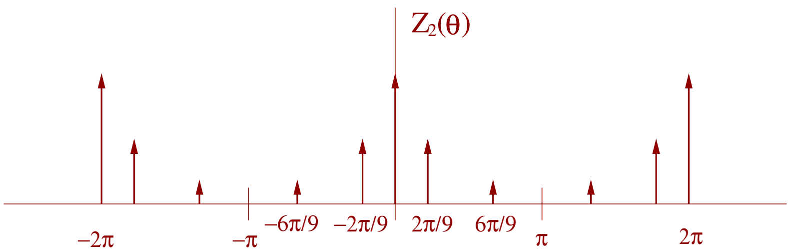
que es la expresión de la serie de Fourier como un espectro de tiempo continuo con deltas. Las componentes con k par son nulas, excepto para $k=0$.

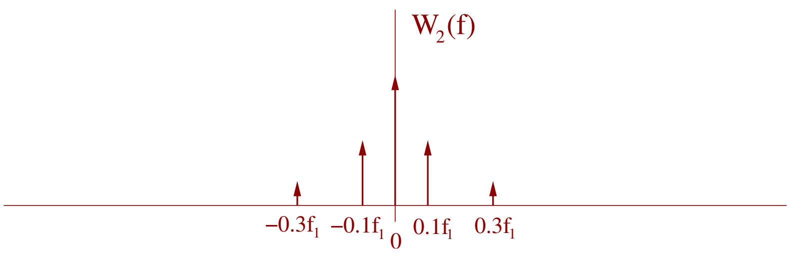


3. [8 pts.] Bosqueje los espectros en $y(t)$, $z[n]$ y $w(t)$ cuando $x(t) = x_2(t)$.

Solución:

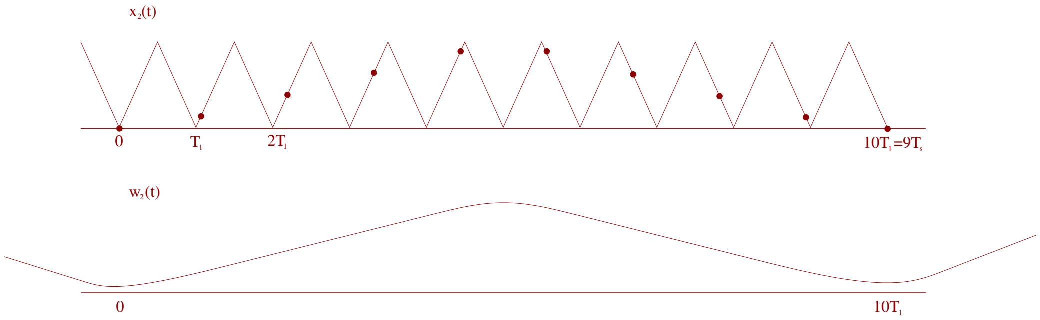






4. [8 pts.] ¿Cómo queda $w(t)$ en el tiempo? Bosquejar.

Solución: Los componentes de la serie de Fourier de $w_2(t)$ son iguales a los de $y_2(t)$, excepto por una homotecia de las frecuencias. Esta homotecia en las frecuencias se corresponde con otra en el tiempo. En $y_2(t)$ la frecuencia fundamental es f_1 mientras que en $w_2(t)$ la fundamental es $f_1/10$. De esto se deduce que, mientras que el período de $y_2(t)$ es T_1, el período de $w_2(t)$ es $10 \cdot T_1$. La forma es esencialmente los triángulos de la señal $x_2(t)$, pero con algunas deformaciones debidas al truncamiento de las componentes de su serie de Fourier.



5. [8 pts.] Modifique el sistema para obtener el doble de resolución, esto es, poder analizar el doble de componentes del espectro.

   Solución: El doble de resolución se logra cambiando la frecuencia de corte del pasabajos a $f_c' = 9f_1$ y la frecuencia de muestreo a $f_s' = 0.95f_1$.