Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de febrero de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Enunciar el teorema del muestreo.

(b) Demostrar.

Aplicación: Sea la señal $x_c(t) = \text{sinc}(8\text{kHz} \cdot t) + \sin(2\pi\ 5\text{kHz} \cdot t)$. La señal $x[n]$ corresponde a muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 6\text{kHz}$.

(c) Hallar $x[n]$, hallar y graficar $X(e^{j\theta})$.

Problema 1

Se tiene proceso $y(t) = x(t) + r(t)$. donde $x(t)$ corresponde a la señal y tiene una densidad espectral de potencia

$$G_x(f) = \Lambda\left(\frac{f - 2F_1}{F_1}\right) + \Lambda\left(\frac{f + 2F_1}{F_1}\right),$$

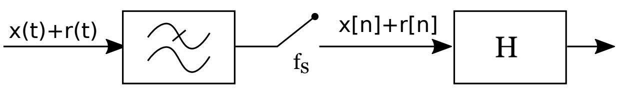
y está contaminada con ruido $r(t)$ con densidad espectral de potencia $G_r(f) = 10^{-4}\Pi(\frac{f}{8F_1})\ \text{Hz}^{-1}$, siendo $F_1 = 10\ kHz$.

(a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo f_s que permite representar al proceso $x(t)$ adecuadamente a partir de sus muestras $x[n]$.

A partir de ahora se trabajará con la frecuencia de muestreo f_s hallada en la parte anterior.

(b) Hallar la potencia del proceso $x[n]$ y $r[n]$ luego del muestreo.

A los efectos de mejorar la relación señal a ruido, se propone utilizar un filtro H pasabandas ideal, que deje pasar sólo las frecuencias donde la densidad espectral de $x[n]$ no es nula.



(c) Dar una expresión de la respuesta en frecuencia del filtro $H(e^{j\theta})$.

(d) Calcular la relación señal a ruido antes y después del filtro H.

Se desea implementar el filtro pasabandas mediante un IIR de orden 2, de manera que:

- los polos tengan módulo 0.8 y estén en la frecuencia θ_1, correspondiente al centro de la banda donde la $G_x(e^{j\theta})$ no es nula.
- la ganancia en $\theta = \theta_1$ sea 1.
- la ganancia en $\theta = \pi$ y $\theta = 0$ es nula.

(e) Hallar los coeficientes del filtro y dar un diagrama de bloques del filtro implementado en la forma canónica.

Se implementa el filtro hallado con operaciones en punto fijo con 12 bits de parte fraccionaria y amplitud máxima 1.

(f) Dar el diagrama de bloques con las fuentes de error introducidas.

(g) Plantear la potencia del error debido a las operaciones en el filtro implementado en función de la respuesta al impulso del filtro.

Problema 2

Se desea implementar un filtro pasabajos digital $H_1(z)$. Como primera aproximación se toma un filtro de media móvil, cuya respuesta al impulso es $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$.

(a) Dar el diagrama completo de ceros y polos de H_1.

(b) Calcular y graficar la respuesta frecuencial de H_1, en módulo y fase.

(c) Calcular el retardo de grupo y estudiar linealidad de fase.

Como medida de la calidad del filtro, se toma el cociente entre la respuesta frecuencial en frecuencia $\theta = 0$, y dentro de la banda de corte en $\theta = 3\pi/4$: $Q_1 = |H_1(e^{j0})/H_1(e^{j3\pi/4})|$.

(d) Calcular Q_1.

Para mejorar la calidad, se agrega un filtro (real y causal) recursivo $H_2(z)$ en cascada con H_1, de la forma $H_2(z) = 1/(1-\alpha z^{-1})$.

(e) Calcular la respuesta frecuencial de H_2.

(f) Calcular el parámetro α para que el factor de calidad total de los 2 filtros en cascada sea $Q = 20$.

(g) El filtro resultante ($H(z) = H_1(z)H_2(z)$), ¿es de fase lineal?. Justificar.

(h) Al variar el parámetro α, se afecta tanto el factor de calidad Q del filtro, así como el retardo de grupo del mismo. Comentar cómo varían estas 2 propiedades al acercarse el polo al círculo unidad. Justificar.

El filtro $H(z)$ se implementa en forma canónica.

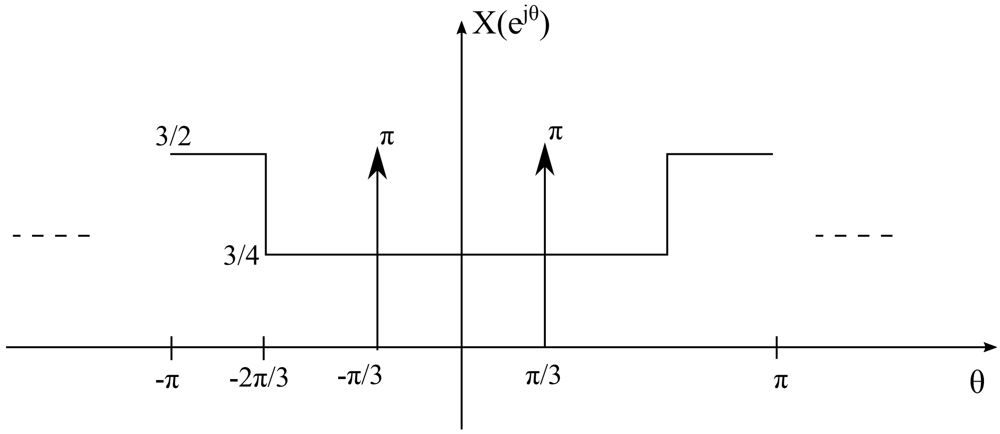
(i) Dar el diagrama de bloques completo del filtro. Dar el diagrama del filtro modelando los errores en las operaciones, que se realizan en punto fijo con redondeo.

Solución

Pregunta

(c) $x[n] = \text{sinc}(4n/3) + sin(2\pi \cdot 5n/6)$. El espectro de x_c es $X_c(f) = 1/8000 \cdot \Pi(f/8000) + 0.5\delta(f-5000) + 0.5\delta(f+5000)$, $X(e^{j\theta})$ es la superposición cada 2π de la función $f_s/8000 \cdot \Pi(\theta f_s/16000\pi) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 4/3) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 4/3) = 3/4\Pi(3\theta/8\pi) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 5/6) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 5/6)$:

$$X(e^{j\theta}) = 3/4 \sum_k \Pi(3(\theta - 2k\pi)/(8\pi)) + \delta(\theta - 2\pi 5/6 + 2k\pi) + \delta(\theta - 2\pi 5/6 + 2k\pi)$$



Problema 1

(a) La minima frecuencia de muestreo corresponde al doble del ancho de banda de x, que en este caso es $3F_1$ por lo que la frecuencia de muestreo es $f_s = 6F_1$.

(b) Se trabaja con una frecuencia de muestreo de 60 kHz, por lo que el filtro pasabajos previo al muestreo tendrá una frecuencia de corte de 30 kHz correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo para evitar el solapamiento del ruido. Esto elimina parte del ruidopresente en la señal de tiempo continuo.
La potencia de x, se puede calcular en el dominio de las frecuencias como:

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_x(e^{j\theta}) d\theta$$

$$P_x = f_s/3 = 20000$$

Similarmente, la potencia del ruido es:

$$P_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_r(e^{j\theta}) d\theta$$

$$P_r = \frac{1}{2\pi} 2\pi 10^{-4} f_s = 6$$

(c) El filtro debe dejar pasarla banda de frecuencias $[\pi/3, \pi]$. Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del filtro es $H(e^{j\theta}) = \Pi(\frac{\theta - 2\pi/3}{2\pi/3}) + \Pi(\frac{\theta + 2\pi/3}{2\pi/3})$

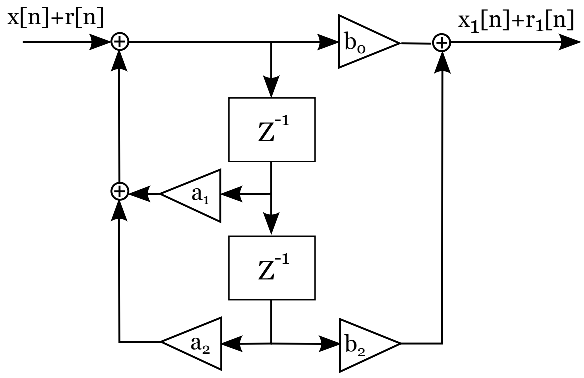
(d) La potencia de la señal permanece incambiada, sin embargo la potencia del ruido se reduce en un tercio ya que la banda pasante es un tercio del espectro y su densidad espectral de potencia es constante.

$$P_x = f_s/3$$

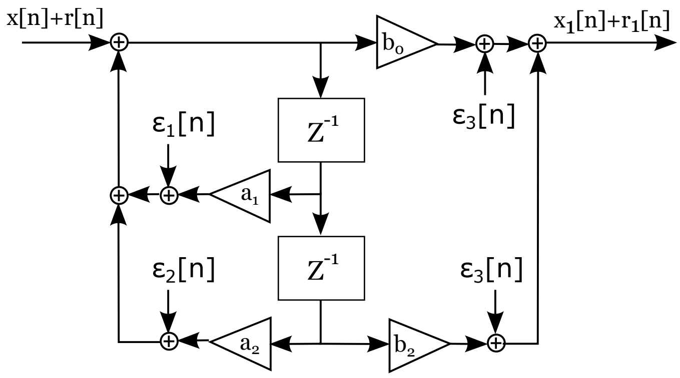
$$P_r = \frac{2}{3} \times 10^{-4} f_s = 4$$

(e) Los coeficientes son: $b_2 = 0.18$, $b_1 = 0$, $b_2 = -0.18$,$a_1 = 0.8$, $a_0 = 0.64$.

(f)



(g) Hay dos fuentes de error en la entrada al filtro y dos fuentes de error en la salida.



La potencia del error a la salida es

$$P_e = \sigma_{\epsilon_1}(2 + 2 * \sum_{-\infty}^{\infty} h^2[n])$$

Donde $\sigma_{\epsilon_1} = \frac{\Delta^2}{12}$ y $\Delta = \frac{2}{2^{12}} = 2^{11}$.

$$P_e = \frac{2^{21}}{3}(1 + \sum_{-\infty}^{\infty} h^2[n])$$

Problema 2

(a) El filtro tiene 3 ceros en $z = -1$ y $z = \pm j$, y los correspondientes 3 polos en $z = 0$.

(b) Según se opere como una serie geométrica o directamente, se obtienen los siguientes resultados equivalentes:

$$H_1(e^{j\theta}) = e^{-j3\theta/2}\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

$$H_1(e^{j\theta}) = 2e^{-j3\theta/2}(\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2))$$

La ganancia en DC es 4, y vale 0 donde los ceros (en frecuencias $\pi/2$ y π).

(c) Es un filtro de fase lineal generalizada, de tipo II, con retardo de grupo constante $\tau(e^{-j\theta}) = 3/2$.

(d)

$$Q_1 = 4/2.|\cos(3\pi/8) + \cos(9\pi/8)| = 3.6955$$

(e)

$$H_2(e^{j\theta}) = 1/(1 - \alpha e^{-j\theta})$$

(f) El factor de calidad del fitlro total es el producto de los dos factores individuales. Entonces para llegar a $Q = 20$, es necesario que el filtro recursivo tenga $Q_2 = 20/Q_1 = 5.41$.

$$Q_2 = \frac{|1 - \alpha e^{-j3\pi/4}|}{|1 - \alpha|}$$

$$Q_2^2 = \frac{(1 - \alpha \cos(-3\pi/4))^2 + \alpha^2 \sin(-3\pi/4)^2}{(1 - \alpha)^2}$$

$$= \frac{1 + \alpha^2 + \alpha\sqrt{2}}{1 - 2\alpha + \alpha^2}$$

$$\alpha^2(1 - Q_2^2) + \alpha(2Q_2^2 + \sqrt{2}) + (1 - Q_2^2) = 0$$

Esta expresión tiene soluciones $\alpha = 1.413$ y $\alpha = 0.7077$ (sospechosamente cercanos a $\sqrt{2}$). Para que el filtro sea estable, tomamos la solución dentro del círculo unidad: $\alpha = 0.7077$.

(g) El filtro $H(z)$ es recursivo, por lo tanto no puede ser de fase lineal.

(h) Al acercarse α a 1 (es decir, al círculo unidad), será más notorio y localizado el efecto del polo en la respuesta frecuencial.
Por una parte, la resonancia en frecuencia 0 será más marcada, y por lo tanto Q aumentará.
Por otra parte, la cercanía del polo al círculo unidad provoca un cambio de fase más localizado, y por lo tanto el retardo de grupo será mayor cerca de frecuencia 0 y menor a frecuencias mayores. Esto va en detrimento de la linealidad de fase.
En definitiva, a mayor α, una resonancia más marcada, y peor linealidad de fase.

(i) El coeficiente recursivo del filtro es α. Los coeficientes no recursivos son $[1\,1\,1\,1]$.
Las operaciones en punto fijo sólo afectan el producto por α. Este error se modela como un proceso blanco e independiente de la señal de entrada, sumado a la entrada del filtro.