Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

15 de diciembre de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Enunciar el teorema del muestreo para señales.

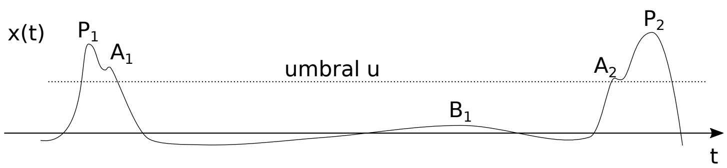
(b) Demostrar.

La señal $x_c(t)$ tiene ancho de banda menor que 1 kHz, y es muestreada a $f_s = 2\,\mathrm{kHz}$.
Las muestras son la señal periódica $x[n] = \cdots, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \cdots$: vale 1 para $n = 4k$, 0 para n impar, y -1 para $n = 4k + 2$.

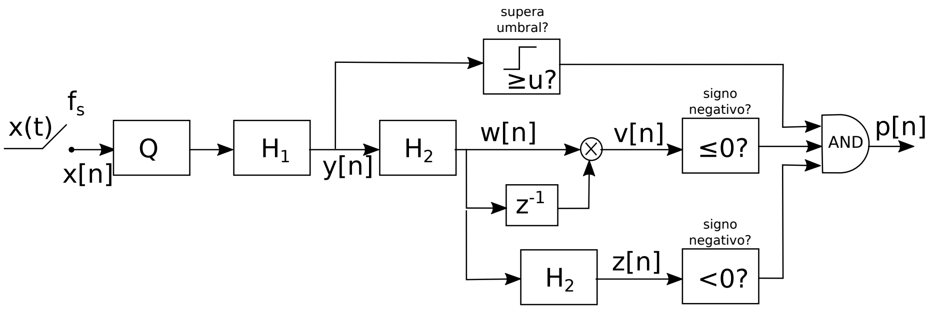
(c) Hallar todas las posibles señales $x_c(t)$. Justificar.

Problema 1

En este problema se estudiará un sistema para detectar picos de una señal que superan un cierto valor umbral u. Como ejemplo se muestra la forma de onda de una señal donde los puntos que deben ser detectados como picos son P_1 y P_2. Los puntos A_1 y A_2 deben ser descartados por ser picos espurios. Asimismo, el máximo B_1 debe ser descartado ya que no supera el valor de umbral u.



El diagrama de bloques del sistema que será estudiado es el siguiente, donde se busca el cumplimiento de 3 condiciones simultáneamente:



La entrada al sistema es un proceso $x(t)$ cuya densidad espectral de potencia es

$$G_x(f) = \frac{1}{40000}\Pi\left(\frac{f}{20000\text{ Hz}}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi f}{10000\text{ Hz}}\right)\right].$$

(a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo que permite representar correctamente al proceso x.

Se trabajará a partir de ahora con la frecuencia de muestreo hallada en la parte anterior. En el muestreo, el proceso es cuantizado con 8 bits.

(b) Describir detalladamente el modelo para el error de cuantización. Describir detalladamente las hipótesis que se realizan para asumir dicho modelo.

(c) Graficar la densidad espectral de potencia del proceso $x[n]$ y del ruido de cuantización introducido. Hallar la relación señal a ruido luego de la cuantización.

El filtro H_1 es un pasabajos cuyo objetivo es suavizar las pequeñas oscilaciones de $x[n]$ y así evitar la detección de picos en puntos como A_1 y A_2. La respuesta al impulso de H_1 es $h_1[n] = 0.25\delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2]$.

(d) Graficar las densidades espectrales de potencia y calcular la nueva relación señal a rudio luego del filtro H_1.

El filtro H_2 es una aproximación de primer orden de un derivador; tiene respuesta al impulso $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

(e) Explicar el funcionamiento de cada uno de los tres caminos que son evaluados mediante el operador lógico AND para la correcta detección de un pico.

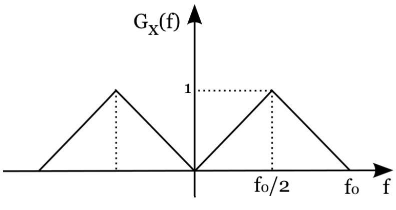
(f) Analice el retardo de grupo de cada uno de los tres caminos. Indique si cree necesario hacer algún cambio al sistema para tener en cuenta los retardos introducidos.

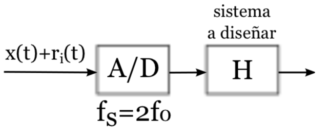
Como se observa en el diagrama, el proceso $v[n]$ es calculado realizando el producto de dos procesos $w[n]$ y $w[n-1]$.

(g) Explique si esto representa un problema para el sistema respecto a cumplir el Teorema del Muestreo en ese punto del sistema. Justificar.

Problema 2

Se desea digitalizar una señal $x(t)$ que se encuentra contaminada con un ruido interferente $r_i(t)$. La señal se modela como un proceso con densidad espectral de potencia como se muestra en la figura. El ruido interferente también se modela como un proceso, independiente de $x(t)$, con autocorrelación $R_i(t) = cos(2\pi f_i t)$ con $f_i = f_0/3$.





(a) Calcular la relación de potencia de la señal respecto a la potencia de la interferencia.

Para eliminar la interferencia se debe diseñar H formado por dos filtros en cascada, H_{FIR} y H_{IIR}. H_{FIR} es un filtro FIR de segundo orden y H_{IIR} es un filtro puramente recursivo (sin ceros) de primer orden, ambos causales y estables, con coeficientes reales, que cumplen las siguientes condiciones:

- H_{FIR} debe eliminar la frecuencia de la interferencia.
- H_{FIR} debe tener ganancia $\alpha > 1$ en continua ($\theta = 0$).
- H_{IIR} debe tener ganancia inversa a $H_{\mathrm{FIR}}(e^{j0})$ en $\theta = 0$.
- H_{IIR} debe tener ganancia inversa a $H_{\mathrm{FIR}}(e^{j\pi})$ en $\theta = \pi$.

(b) Diseñar el filtro H_{FIR} que cumpla con las especificaciones indicadas.

(c) Diseñar el filtro H_{IIR} que cumpla con las especificaciones indicadas.

(d) ¿Existe α tal que el filtro H sea inestable? Justificar.

(e) Bosquejar el módulo de la respuesta frecuencial de H.

En la implementación de los filtros las operaciones se realizan en punto fijo con redondeo utilizando 12 bits de parte fraccionaria. Ambos filtros se deben implementar de manera de minimizar individualmente el ruido debido a los errores en las operaciones.

(f) Dar el diagrama de bloques del filtro H_{FIR}. Justificar.

(g) Dar el diagrama de bloques del filtro H_{IIR}. Justificar.

(h) En el sistema de filtros en cascada, indicar el orden más conveniente para minimizar el ruido a la salida debido a los errores en las operaciones (H_{FIR} primero o H_{IIR} primero). Justificar.

Solución

Pregunta

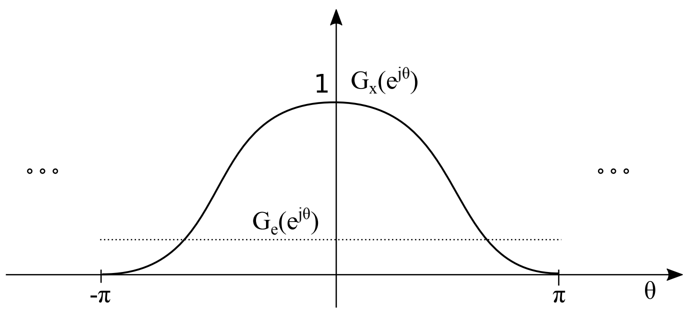
(c) La señal muestreada es de banda limitada $f_N < f_s/2$, por lo tanto está determinada por sus muestras, y por lo tanto es única.
Se puede observar de la secuencia $x[n]$ que la señal tiene período 4 muestras, lo que equivale a $f_s/4 = 500$Hz. Entonces la señal x_c será periódica y podrá tener componentes en los distintos armónicos: 0 Hz, 500 Hz, 1000 Hz, 1500 Hz, etc.
De las muestras se ve que componente de continua (0 Hz) no hay (el valor medio en un período da 0). Y como la letra indica que f_N es menor a 1 kHz, tampoco habrá componentes a partir del segundo armónico.
Así que queda únicamente la frecuencia fundamental.
Observando la fase de las muestras, la única sinusoidal de frecuencia 500 Hz que corresponde con las muestras es $x_c(t) = \cos(2\pi\, 500\text{Hz}\, \text{t})$.

Problema 1

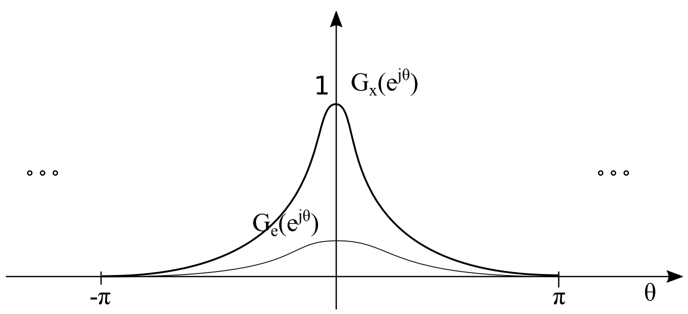
(a) La mínima frecuencia de muestreo es $f_s = 2 \times 10000$ Hz $= 20000$ Hz

(b) Ver teórico.

(c) La densidades espectrales de potencia son $G_x(e^{j\theta}) = 0.5 + 0.5cos(\theta)$ y $G_e(e^{j\theta}) = \Delta^2/12$, donde $\Delta = 2/2^8 = 2^{-7}$. La potencia de señal es 0.5 y la potencia de ruido 5.086×10^{-6}. La SNR es 49.9 dB.



(d)



La potencia del ruido se puede calcular aplicando Parseval para el caso en que la entrada a un sistema tiene características de ruido blanco, siendo $P_e = \sigma_e^2(0.5^2 + 2 * 0.25^2) = 0.375 \times 5.086 \times 10^{-6} = 1.907 \times 10^{-6}$
La densidad espectral de potencia de la señal es $G_y(e^{j\theta}) = (0.5+0.5\cos(\theta))|0.5+0.5\cos(\theta)|^2$. Antitransformando, y considerando la simetría de la antitransformada de $(0.5+0.5\cos(\theta))$ y teniendo en cuenta que es real, se tiene $R_y[m] = r[n]*r[n]*r[n]$, donde $r[n] = 0.25\delta[n-1]+0.5\delta[n]+0.25\delta[n+1]$. Calculando las convoluciones y evaluando, la potencia de la señal es $R_y[0] = 0.3125$ Por lo tanto la nueva SNR es 52.1 dB.

(e) El camino superior verifica que se esté por encima del valor mínimo u para considerar que es un pico. El camino del medio verifica que corresponda a un máximo o mínimo verificando que hay un cambio de signo de la derivada. El último camino comprueba que se trate de un máximo al evaluar que la derivada segunda sea negativa.

(f) El filtro H_1 tiene un retardo de grupo 1 que afecta los tres caminos. Luego El filtro H_2 introduce un retardo de media muestra, y de 1.5 muestras en el camino que incluye el retardo. El tercer camino tiene un retardo de grupo de 1 muestra. Es posible que la condición de umbral no se verifique en el mismo punto que la derivada segunda por lo que tiene sentido agregar un retardo de una muestra al primer camino.

(g) No presenta un problema ya que en los puntos en los que se evalúa se tiene una representación adecuada de lo que se está calculando. Si se quisiera hacer una reconstrucción ideal de la función producto a partir de las muestras, hubiera sido necesario que trabajara con el doble de frecuencia de muestreo, pero esto es irrelevante a los efectos del problema.

Problema 2

(a) La potencia de la señal es:

$$S_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_x(e^{j\theta})d\theta = \frac{2\pi f_s}{2\pi} = f_s = 2f_0$$

La potencia de la señal interferente es:

$$S_i = R_i[0] = R_i(0) = 1$$

Por lo que la relación señal a interferencia es:

$$R = 10\log_{10}(2f_0)$$

(b) El filtro H_{FIR} es de segundo orden, con ganancia α en $\theta = 0$ y tiene ceros en $\pm\theta_i$ por lo que toma la forma:

$$H_{\mathrm{FIR}} = \alpha(1 - e^{-j\theta_i}z^{-1})(1 - e^{j\theta_i}z^{-1}) = \alpha(1 - 2\cos\theta_i z^{-1} + z^{-2})$$

Luego $\cos\theta_i = \frac{1}{2}$ ya que $\theta_i = \pi/3$, por lo que el filtro FIR queda:

$$H_{\mathrm{FIR}} = \alpha(1 - z^{-1} + z^{-2})$$

(c) El filtro H_{IIR} es un filtro IIR puro (sin ceros) de primer orden por lo que toma la forma:

$$H_{\mathrm{IIR}} = \beta\frac{1}{(1 - pz^{-1})}$$

Imponiendo las condiciones para la ganancia en continua y en $\theta_i = \pi$ se tiene:

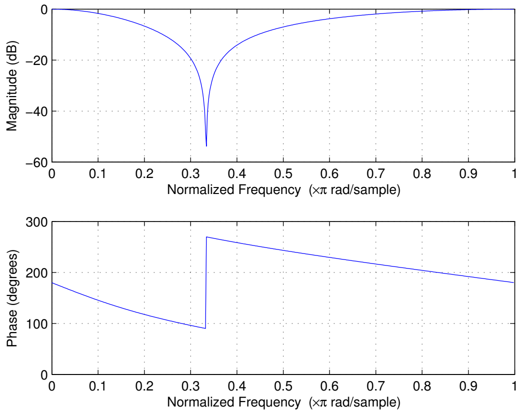
$$\beta\frac{1}{(1-p)} = \frac{1}{\alpha} \qquad \text{y} \qquad \beta\frac{1}{(1+\mathrm{p})} = \frac{1}{3\alpha}$$

De esta forma se llega a $\beta = 1/2\alpha$ y $p = 1/2$ y el filtro IIR queda:

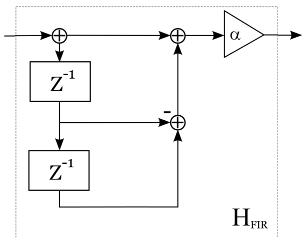
$$H_{\mathrm{IIR}} = \frac{1}{2\alpha(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

(d) No, el polo siempre es $p = 1/2$, por lo que está dentro del círculo unidad para cualquier valor de α.

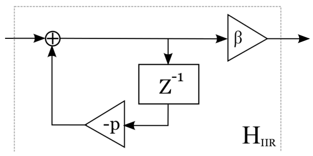
(e)



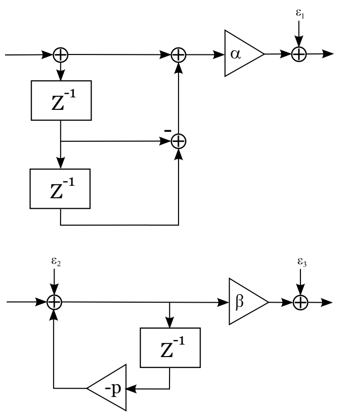
(f) El diagrama de bloques para cada filtro se muestra en la figura.



(g) El diagrama de bloques para cada filtro se muestra en la figura.



(h) Hay una única fuente de error en las operaciones para el filtro H_{FIR} mientras que hay dos en el filtro H_{IIR}.



Por un lado el ruido en H_{FIR}, $\epsilon_1[n]$, se ubica a la salida del filtro. Por otro lado, en H_{IIR}, $\epsilon_2[n]$ se ubica a la entrada del filtro mientras que $\epsilon_3[n]$ se ubica a la salida del filtro. Todos los $\epsilon_i[n]$ son procesos blancos de media nula, independientes entre sí y de la entrada, con potencia $\sigma^2 = \Delta^2/12$. Esto hace que si el orden es con H_{FIR} primero el ruido total a la salida queda:

$$\sigma_e^2 = 2\sigma^2 \sum |h_{\mathrm{IIR}}[n]|^2 + \sigma^2$$

Si por el contrario el orden es con H_{IIR} primero el ruido total a la salida queda:

$$\sigma_e^2 = \sigma^2 \sum |h[n]|^2 + \sigma^2 \sum |h_{\text{FIR}}[n]|^2 + \sigma^2$$

De esta forma, para resolver qué orden es más conveniente, se debe estudiar la relación entre: $2\sum |h_{\text{IIR}}[n]|^2$ y $\sum |h[n]|^2 + \sum |h_{\text{FIR}}[n]|^2$
Tenemos que $h_{\text{FIR}}[n] = \alpha(\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2])$ y $h_{\text{IIR}}[n] = \beta p^n u[n]$, mientras que $h[n] = \alpha\beta(p^n u[n] - p^{n-1}u[n-1] + p^{n-2}u[n-2]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(\delta[n] - \delta[n-1] + 3u[n-2])$. Se puede ver que:

$$\sum |\text{h}_{\text{IIR}}[\text{n}]|^2 = \frac{1}{4\alpha^2}\sum_{\text{n}=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\text{n}} = \frac{1}{4\alpha^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3\alpha^2}$$

$$\sum |\text{h}_{\text{FIR}}[\text{n}]|^2 = 3\alpha^2$$

$$\sum |h[n]|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{19}{48}$$

De esta forma, con $\alpha > 1$, resulta que:

$$2\frac{1}{3\alpha^2} < \frac{19}{48} + 3\alpha^2 \rightarrow 2\sum |h_{\text{IIR}}[n]|^2 < \sum |h[n]|^2 + \sum |h_{\text{FIR}}[n]|^2$$

por lo que es más conveniente el sistema con H_{FIR} primero.