Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

11 de diciembre de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Enunciar el teorema del muestreo.

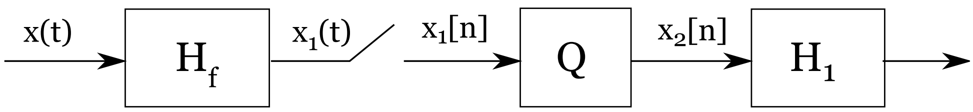
(b) Demostrar.

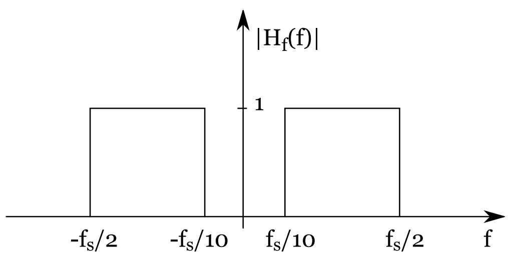
Aplicación: Sea la señal $x_c(t) = \text{sinc}(8\text{kHz} \cdot t) + \sin(2\pi\ 5\text{kHz} \cdot t)$. La señal $x[n]$ corresponde a muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 6\text{kHz}$.

(c) Hallar $x[n]$, hallar y graficar $X(e^{j\theta})$.

Problema 1

Se tiene un sistema como el que se muestra en la figura, donde se utiliza una frecuencia de muestreo f_s.





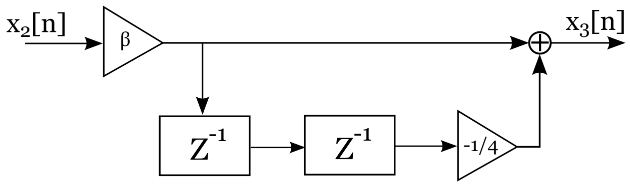
Se desea filtrar un proceso $x(t)$ con la siguiente autocorrelación:

$$R_x(\tau) = \frac{T}{2} \sum_k \delta(\tau - kT)$$

con $T = 3T_s$.

(a) Hallar la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso $x_1(t)$. Hallar la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso $x_1[n]$.

El proceso $x_1[n]$ será cuantizado por el cuantizador Q con un paso de cuantización Δ con redondeo, para luego ser filtrado por un filtro H_1. La implemantación de dicho filtro se muestra en la siguiente figura:



Se requiere que la respuesta en frecuencia de H_1 sea igual a 1 en $\theta = \pi/2$.

(b) Hallar la respuesta al impulso $h_1[n]$ y su respuesta en frecuencia $H_1(e^j\theta)$.

(c) Hallar la relación señal a ruido a la entrada y a la salida del filtro $H_1(z)$. Comparar.

A la salida de este sistema se agrega otro filtro $H_2(z)$ que tiene sólo un polo doble ubicado en $z_p = 2/3$, no tiene ceros y su respuesta frecuencial en continua vale 9.

(d) Dar una expresión de la transferencia del filtro $H(z)$ que equivale a H_1 y H_2 en cascada.

(e) $H(z)$ se va a implementar utilizando únicamente dos elementos de retardo. Dar un diagrama de bloques para $H(z)$.

Problema 2

Suponga que se obtuvo la secuencia en tiempo discreto $s[n]$ mediante el filtrado de una señal de voz $s_c(t)$ con un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte de 11 kHz y luego muestreando la salida a una tasa de 22 kHz. El rango de variación de $s_c(t)$ es $[-1, 1]$ y se utilizaron 16 bits por muestra en la captura.
Se desea minimizar la frecuencia de muestreo para ahorrar memoria en el almacenamiento de la señal, pero no se dispone de $s_c(t)$, aunque se sabe que el espectro de $s_c(t)$ era

$$G_{sc}(f) = 0.1\delta(f) + 10^{-4}\left[\Lambda\left(\frac{f - 2.5\text{kHz}}{1.5\text{kHz}}\right) + \Lambda\left(\frac{f + 2.5\text{kHz}}{1.5\text{kHz}}\right)\right].$$

(a) Proponer un sistema en tiempo discreto para obtener $s_1[n]$ a partir de $s[n]$, que represente correctamente a $s_c(t)$ y utilice la mínima frecuencia de muestreo posible.

(b) Graficar el espectro de los procesos en todos los puntos intermedios del sistema propuesto.

Se descubre también que la componente de continua corresponde a una interferencia no deseada, por lo que se propone el filtro

$$H(z) = 0.95\frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}$$

para eliminarla.

(c) Hallar a y b para que se anule la componente de continua y la ganancia en frecuencia π sea igual a 1.

(d) Bosquejar la respuesta del filtro H, y el espectro antes y después del filtrado.

A su vez, se desea minimizar la cantidad de bits por muestra de manera de tener una $SNR \geq 50$dB.

(e) Hallar la mínima cantidad de bits por muestra necesaria para cumplir con la SNR deseada.

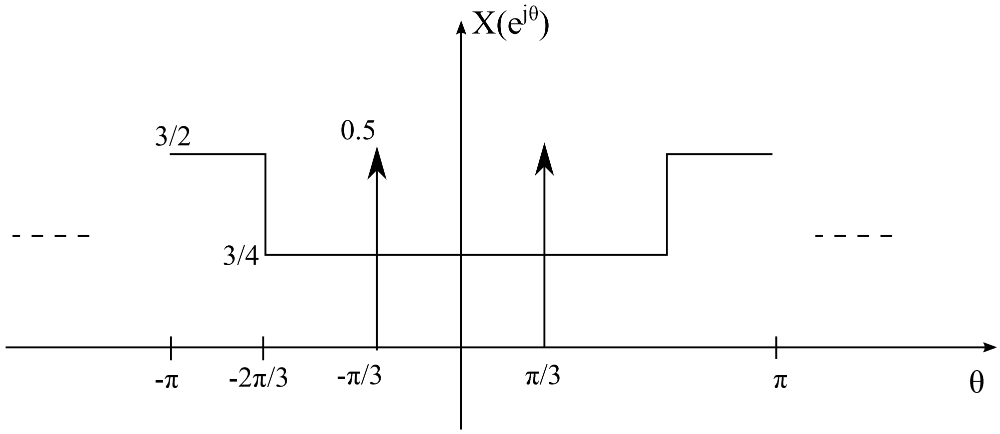
(f) Comparar la cantidad de bits por segundo necesaria para almacenar $s[n]$ y la señal luego de cambiar la frecuencia de muestreo y la cantidad de bits por muestra.

Solución

Pregunta

(c) $x[n] = \text{sinc}(4n/3) + sin(2\pi \cdot 5n/6)$. El espectro de x_c es $X_c(f) = 1/8000 \cdot \Pi(f/8000) + 0.5\delta(f-5000) + 0.5\delta(f+5000)$, $X(e^{j\theta})$ es la superposición cada 2π de la función $f_s/8000 \cdot \Pi(\theta f_s/16000\pi) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 4/3) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 4/3) = 3/4\Pi(3\theta/8\pi) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 5/6) + 0.5\delta(\theta - 2\pi 5/6)$:

$$X(e^{j\theta}) = 3/4 \sum_k \Pi(3(\theta - 2k\pi)/(8\pi)) + \delta(\theta - 2\pi 5/6 + 2k\pi) + \delta(\theta - 2\pi 5/6 + 2k\pi)$$



Problema 1

(a) La autocorrelación de $x(t)$ es un tren de deltas por lo que la densidad espectral de potencia será también un tren de deltas:

$$G_x(f) = \frac{T}{2T} \sum_k \delta(f - k/T)$$

Por lo tanto la densidad espectral de potencia luego del filtrado es

$$G_x(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - 1/3T_s) + \delta(f + 1/3T_s))$$

entonces la autocorrelación es

$$R_{x_1}(\tau) = cos(2\pi\tau/(3T_s))$$

Luego, la densidad espectral de potencia de $x[n]$ es

$$G_{x_1}(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{2} \sum_k (\delta(\theta - 2\pi/3 + 2k\pi) + \delta(\theta + 2\pi/3 + 2k\pi)).$$

La autocorrelación de $x[n]$ es entonces

$$R_{x_1}[m] = cos(2\pi m/3)$$

(b) El filtro H_1 tiene la forma

$$H_1(z) = \alpha(z - 1/2)(z + 1/2)$$

Evaluando en $z = j$ se tiene $\alpha(j - 1/2)(j + 1/2) = 1$ y entonces $\alpha = -4/5$.
La respuesta al impulso es $h_1[n] = -4/5(\delta[n+2] - \delta[n]/4)$.

(c) A la entrada $S_{x_2} = 1$ y la potencia del ruido introducido por el cuantizador de paso Δ es $N_e = \sigma_n^2 = \Delta^2/12$. La relación señal a ruido en la entrada es $SNR_e = \frac{12}{\Delta^2}$.
A la salida, la potencia del ruido es $N_s = \sigma_n^2 \sum_k h_1^2[k] = 0.68\Delta^2/12$.
Para calcular la potencia de señal S_{x_3}, se tiene en un período que

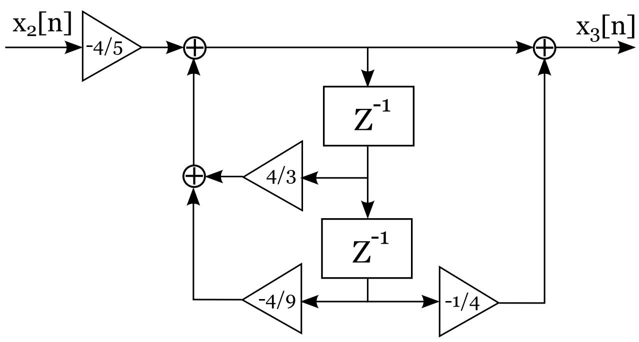
$$G_{x_3}(e^{j\theta}) = |H_1(e^{j\theta})|^2\big|_{\theta=2\pi/3}\,\delta(\theta - 2\pi/3) + |H_1(e^{j\theta})|^2\big|_{\theta=-2\pi/3}\,\delta(\theta + 2\pi/3).$$

Por lo tanto se tiene que $S_{N_3} = 2 \times 0.84 = 1.68$.
Finalmente $SNR_s \approx 29.6/\Delta^2$, lo cual representa una mejora ya que atenúa más las frecuencias donde no hay señal.

(d)

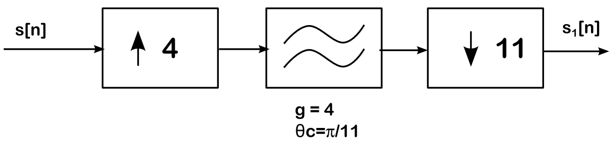
$$H(z) = -\frac{4}{5}\frac{1 - 1/4z^{-2}}{(1 - 4/3z^{-1} + 4/9z^{-2})}$$

(e)

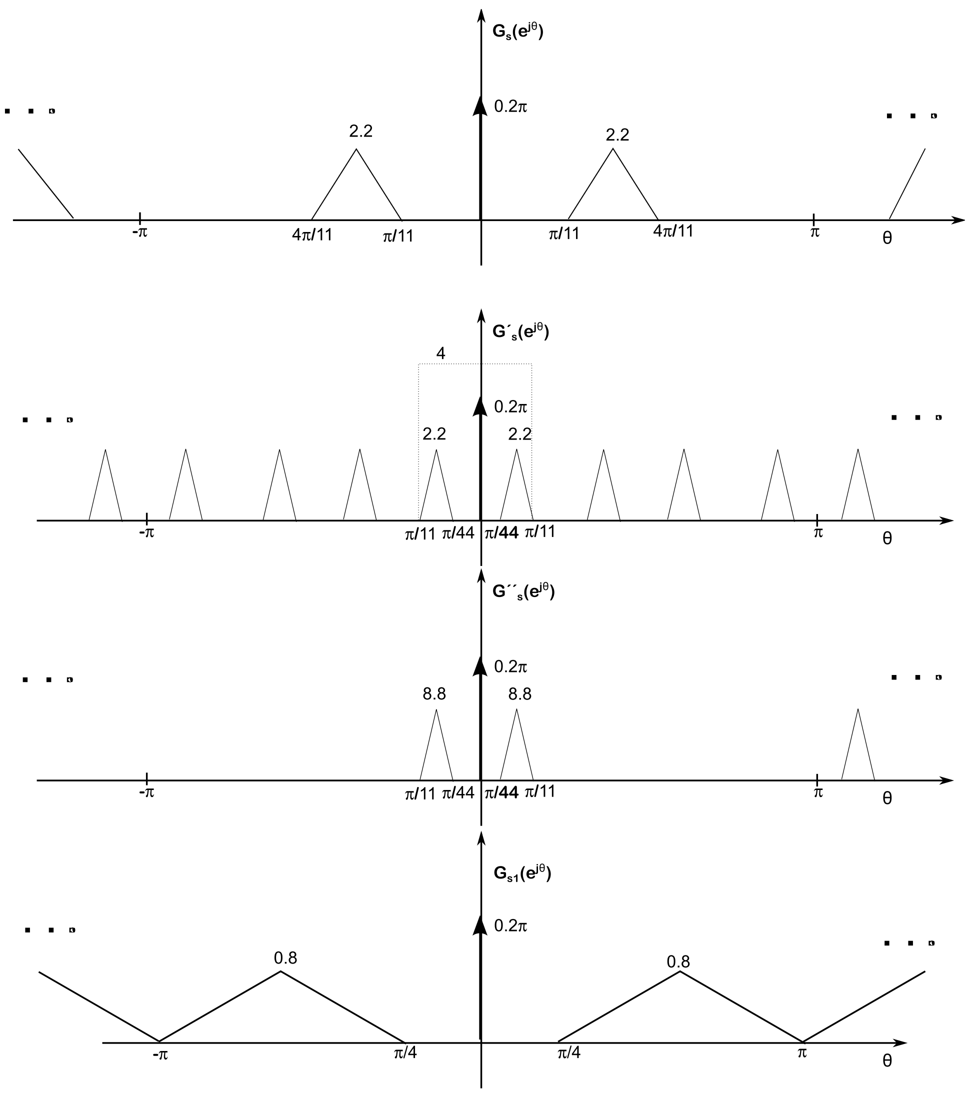


Problema 2

(a) El sistema consiste en un expansor por un factor de 4, seguido por un filtro pasabajos y finalmente un decimador con un factor de 11. El filtro intermedio tiene como frecuencia de corte $\pi/11$ y ganancia 4.



(b)

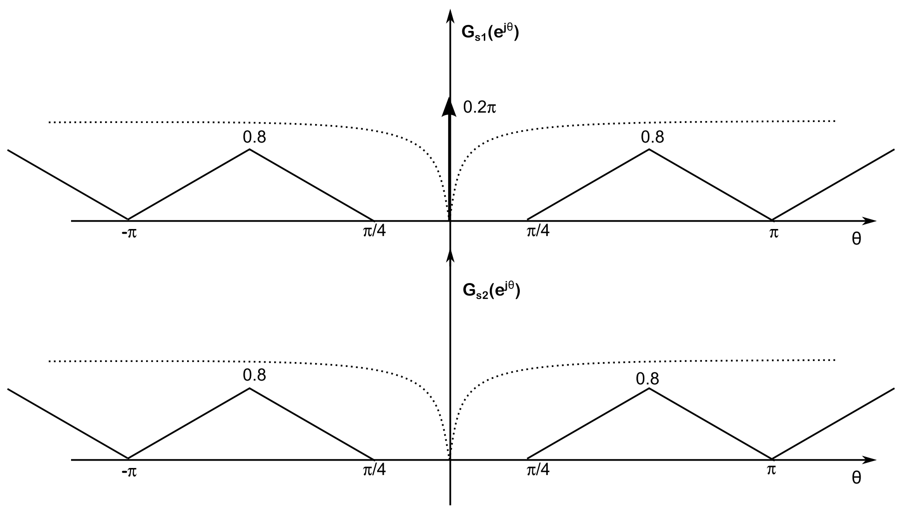


(c) Debe haber un cero en fecuencia 0, es decir en $z = 1$, por lo que $a = 1$. Para cumplir la ganancia en $\theta = \pi$, se tiene

$$0.95\frac{1+1}{1+b} = 1$$

y por lo tanto $b = 0.9$.

(d) El fitro es aproximadamente 1 en la zona donde hay señal y anula la componente en frecuencia 0. Por lo que la densidad espectral de potencia de la señal de interés queda prácticamente inalterado.



(e) La solución es aproximada ya que asumimos que la potencia de la señal es igual a la original (se ve inalterada por el filtro que elimina la continua).
Se tiene que la potencia de la señal es $P_s = 2 \times \frac{3000 \times 10^{-4}}{2} = 0.3$ Por otro lado, la potencia del ruido de cuantización es $P_N = \Delta^2/12$
Entonces se tiene que $10^5 \leq 0.3/(\Delta^2/12)$ y por lo tanto $\Delta^2 \leq 3.6 \times 10^{-5}$ y entonces $\Delta \leq 0.006$
Luego $2^{-B} = \Delta \leq 0.006$, entoncee $B \geq -\log_2 0.006 = 7.38$ Por lo tanto la solución que cumple lo pedido es $B = 8$

(f) La cantidad de bits original, considerando el signo era $R_{b1} = 22000 * 17 = 374kBits/s$ y luego del procesamiento se logra $R_{b2} = 8000 * 9 = 72kBits/s$ obteneiendo un ahorro significativo.