Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

10 de diciembre de 2012

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Requerimiento de aprobación: responder correctamente la pregunta y un ejercicio completo.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación duciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

Problema 1

Un sistema de grabación de señales telefónicas toma la señal telefónica digital y la graba en un archivo de audio. La señal telefónica tiene una frecuencia de muestreo de 8 kHz, y la señal a grabar debe tener frecuencia de muestreo de 44,1 kHz.
Se debe diseñar un sistema de tiempo discreto que permita adaptar la señal telefónica a la nueva frecuencia de muestreo. Una limitación del procesador a utilizar es que no puede manejar señales con frecuencia de muestreo mayor a 1 MHz en ninguna etapa del procesamiento.

(a) Dar el diagrama de bloques completo del sistema de adaptación. Indicar la frecuencia de muestreo en cada punto, y las características de los filtros utilizados.

(b) Bosquejar los espectros de las señales en cada punto.

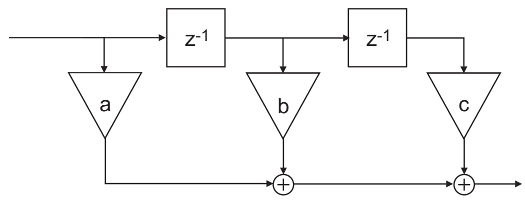
(c) Dar la respuesta al impulso de cada uno de los filtros utilizados.

Problema 2

Al filtro digital *real* de la figura se aplicará la señal $x[n]$ que llega contaminada con $\eta[n]$, ruido blanco aditivo de potencia σ_η^2, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \left(\delta[n] + \frac{\delta[n-1] + \delta[n+1]}{2} \right) \qquad \sigma_x^2 = \sigma_\eta^2$$

El objetivo del filtro es recuperar la señal x.



(a) Hallar condiciones en los parámetros a, b y c del filtro para que este *no* presente distorsión de fase. Hallar la respuesta en frecuencia del filtro.

(b) Hallar el retardo de grupo del filtro T_G.

(c) Cumpliendo las condiciones de la parte anterior, hallar los coeficientes del filtro para que la salida sea lo más similar posible a las señal original $x[n]$ tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido:

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\left\{ (y[n] - x[n - T_G])^2 \right\}$$

donde $y[n]$ es la salida del filtro a la entrada $x[n] + \eta[n]$ y T_G es el retardo de grupo.

(d) Dar un modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto redondeo* con *redondeo*. Justificar.

(e) Calcular la potencia del error de operaciones a la salida del filtro con coeficientes a, b y c genéricos para una entrada de media nula y características de ruido blanco. Se utiliza la misma representación numérica que en la parte anterior. Se deben fundamentar correctamente todos los pasos.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita.
Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

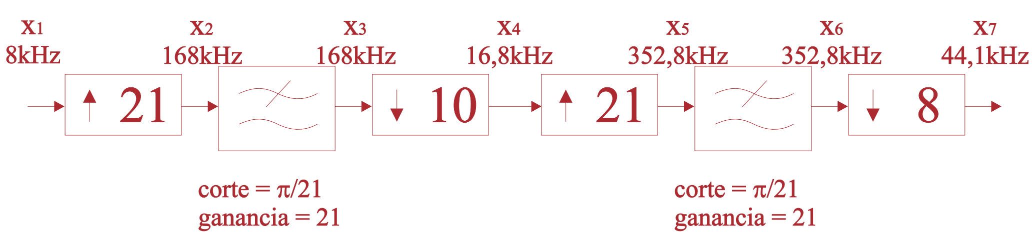
Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

Problema 1

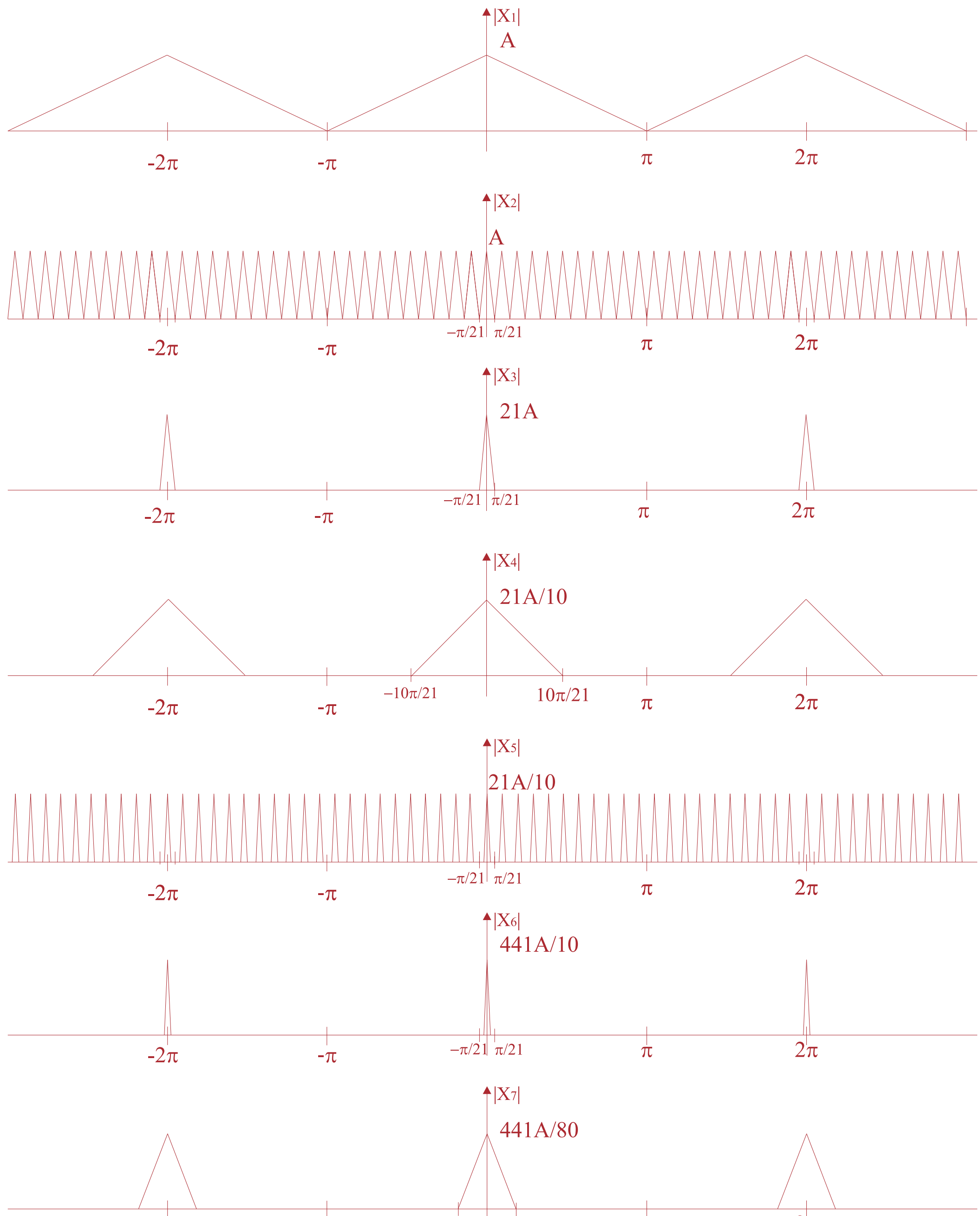
(a) Para cambiar la frecuencia de muestreo, se utiliza un expansor, seguido de un filtro, seguido de un compresor. El expansor debe llevar la frecuencia de muestreo al mínimo común múltiplo entre las frecuencias de entrada y salida.
En este caso, el mínimo común múltiplo es de 3528000 Hz, lo cual supera la máxima frecuencia a la que se puede trabajar. Entonces, hay que hacer este cambio en dos etapas.
44100 es el producto de 100, 3^2 y 7^2; mientras que 8000 es el producto de 100, 5 y 2^4. Para no limitar en banda la señal original, la frecuencia de muestreo debe crecer en cada etapa. Una forma de agrupar los factores es la siguiente:

$$\frac{44100}{8000} = \frac{21}{10}\frac{21}{8}$$

De esta forma se obtienen dos etapas muy similares, ninguna de las cuales maneja factores de expansión o compresión muy elevados. Esto último no sería deseable ya que se debería construir un pasabajos de frecuencia de corte muy baja, y por lo tanto de orden elevado.
Entonces, el sistema queda así:



(b) No hay necesidad de trabajar con procesos estocásticos, trabajaremos con secuencias determinísticas por simplicidad. Por lo tanto, lo que bosquejamos son las transformadas de Fourier de las secuencias en cada punto. Para facilitar la lectura tomamos como secuencia de muestra una con transformada de Fourier $A\Lambda(\theta/\pi)$.



(c) Ambos filtros son iguales, pasabajos ideales con respuesta al impulso:

$$h[n] = \mathrm{sinc(n/21)}$$

Problema 2

(a)

$$H(e^{j\theta}) = a + be^{-j\theta} + ce^{-2j\theta}$$

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(ae^{j\theta} + b + ce^{-j\theta}\right)$$

Si $a = c$,

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(2a\cos\theta + b\right)$$

donde $(2a\cos\theta + b)$ es real. Si no cambia de signo, entonces la fase es lineal, y esto se cumple si $b \geq 2|a|$.

(b) El retardo de grupo es el coeficiente de la exponencial compleja, por lo tanto es 1 muestra.

(c) Debemos minimizar

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\big\{(y[n] - x[n - T_G])^2\big\}$$

$$= \mathbf{E}\big\{\left(ax[n] + a\eta[n] + bx[n-1] + b\eta[n-1] + ax[n-2] + a\eta[n-2] - x[n-1]\right)^2\big\}$$

Como η no está correlacionado con x y tiene media luna, $R_x[0] = \sigma_x^2$, $R_x[1] = \sigma_x^2/2$, $R_x[2] = 0$ y $R_\eta[n] = \sigma_x^2\delta[n]$,

$$\varepsilon^2 = \sigma_x^2\left(4a^2 + 2b^2 - 2a - 2b + 2ab + 1\right).$$

Debemos ahora encontrar los valores de a y b que lo minimizan con la condición $b \geq 2|a|$. Derivando con respecto a estos parámetros, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial a} = \sigma_x^2(8a - 2 + 2b) = 0$$

$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial b} = \sigma_x^2(4b - 2 + 2a) = 0$$

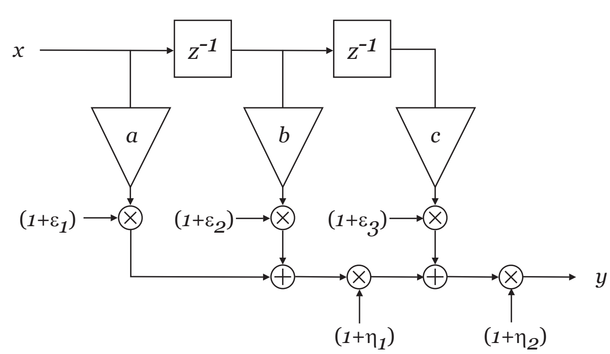
con solución $a = \frac{1}{7}$ y $b = \frac{3}{7}$ (que cumple la relación). Debemos verificar que es un mínimo, lo cual se hace calculando el Hessiano y verificando que los valores propios son positivos.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial a\partial b} \\ \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial b\partial a} & \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

con valores propios 10 y 2.

(d) Ver teórico.

(e) Aplicando el modelo de “ruido de operaciones” al sistema obtenemos



$$y[n] = ax[n](1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) + bx[n-1](1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_2) + cx[n-2](1+\eta_2)(1+\varepsilon_3)$$

y el error es

$$y_n[n] = ax[n]\big[(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) - 1\big] + bx[n-1]\big[(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_2) - 1\big] +$$

$$+cx[n-2]\big[(1+\eta_2)(1+\varepsilon_3) - 1\big].$$

La potencia del error es $\sigma_n^2 = \mathbf{E}\{y_n^2\}$, y, como x es ruido blanco de media nula, no aparecen términos cruzados. Como los ruidos introducidos son independientes entre sí y de la señal x, podemos separar los valores esperados:

$$\sigma_n^2 = \sigma_x^2\Big[a^2\mathbf{E}\big\{((1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) - 1)^2\big\} + b^2\mathbf{E}\big\{((1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) - 1)^2\big\} +$$

$$+c^2\mathbf{E}\Big\{((1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1)-1)^2\Big\}\Big].$$

Como los términos η_i y ε_i son independientes y de media nula, los términos cruzados entre ellos se anulan. Además, despreciamos los términos de segundo y tercer orden, de forma $(\sigma_n^2)^2$ y $(\sigma_n^2)^3$. El resultado final es

$$\sigma_n^2 \approx \sigma_x^2\sigma_n^2[3(a^2+b^2)^2+2c^2].$$