Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

13 de julio de 2011

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Requerimiento de aprobación: responder correctamente la pregunta y un ejercicio completo.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación duciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

Enunciar y demostrar el teorema del muestreo.

Problema 1

Se desea implementar un filtro derivador en tiempo discreto, donde idealmente la respuesta en módulo vale 0 en frecuencia $\theta = 0$ y crece linealmente hasta 1 en $\theta = \pi$.
Como aproximación, se utiliza el filtro H definido por la ecuación en diferencias $y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-1] - \beta x[n-2] - \alpha x[n-3]$.

(a) Estudiar estabilidad de H.

(b) Estudiar linealidad de fase de H.

(c) Calcular la respuesta frecuencial de H, la respuesta en módulo y la respuesta en fase (3 expresiones en total).

(d) Calcular el retardo de grupo $\tau(e^{j\theta})$.

Los parámetros del filtro se ajustarán para asegurar las 3 condiciones siguientes: $H(e^{j0}) = 0$, $|H(e^{j\pi/2})| = 1/2$, y $|H(e^{j\pi})| = 1$.

(e) Calcular α y β.

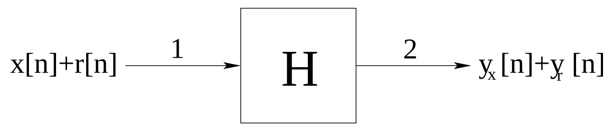
El sistema se implementa con aritmética de punto fijo con 10 bits de parte fraccionaria en un FPGA (dispositivo lógico programable).
Debido a restricciones en el hardware, sólo se pueden implementar 2 multiplicadores. Elementos de retardo, sumas y restas no son un problema ya que requieren mucho menos recursos que un multiplicador.

(f) Dar un diagrama de bloques que implemente el filtro H contemplando las restricciones mencionadas.

(g) Calcular el espectro a la salida del filtro debido a errores en las operaciones.

Problema 2

Se desea mejorar la relación señal a ruido con que llega una señal. La señal original $x[n]$ viene contaminada con ruido aditivo $r[n]$. Se propone procesar la señal mediante un filtro H:



La señal y el ruido se pueden modelar de la siguiente forma:

$$x[n] = \frac{1}{2}(a[n] + a[n-1])$$

$$r[n] = A \cdot (0.7\, b[n] - 0.3\, b[n-1])$$

donde $a[n]$ y $b[n]$ son procesos IID, con valor esperado 0 y potencia 1.

(a) Calcular la relación señal a ruido en el punto 1 en función de A. Evaluar para el caso $A = 0.1$.

(b) Si el filtro H es un pasabajos ideal, calcular la SNR en el punto 2 en función de A y de la frecuencia de corte θ_c. Evaluar para el caso $A = 0.1$, y $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$.

(c) Calcular la respuesta al impulso del pasabajos con $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$.

(d) Comente detalladamente cómo obtener una buena aproximación realizable para este filtro ideal. Comentar sobre ventajas y desventajas del método elegido con respecto a otros métodos. Comentar sobre criterios para elegir el orden del filtro resultante, y en caso que corresponda, la elección de ventanas.

(e) Si el filtro H es un filtro transversal de respuesta impulsiva $\delta[n] + \alpha\delta[n-1]$, calcular, para $A = 0,1$, el parámetro α que minimice el error cuadrático medio entre la señal de entrada y salida:

$$\varepsilon^2 = \mathbb{E}\{(y[n] - x[n])^2\}$$

Nota: recordar que la salida $y[n]$ incluye componentes de señal y de ruido.

Solución

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a) El filtro es FIR, por lo tanto es estable BIBO.

(b) La respuesta al impulso corresponde a un filtro de fase lineal generalizada de tipo IV.

(c)

$$H(e^{j\theta}) = 2j\, e^{-3\theta/2} \left(\beta \sin \frac{\theta}{2} + \alpha \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$|H(e^{j\theta})| = 2 \left| \beta \sin \frac{\theta}{2} + \alpha \sin \frac{3\theta}{2} \right|$$

$\angle H(e^{j\theta}) = \pi\ - 3\theta/2$ donde debe agregarse π en los intervalos en que $\beta \sin \frac{\theta}{2} + \alpha \sin \frac{3\theta}{2} < 0$.

(d) Para filtros FIR de fase lineal, el retardo de grupo es el centro de simetría de la respuesta al impulso. En este caso, $\tau(e^{j\theta}) = 3/2$.

(e) Debe verificarse $2(\alpha - \beta) = 1$ y $\sqrt{2}(\beta + \alpha) = 1/2$.
La solución es $\beta = (\sqrt{2} + 2)/8$ y $\alpha = (\sqrt{2} - 2)/8$.

(f) En la implementación clásica como filtro transversal, se observa que hay parámetros α y β repetidos (α, β, $-\beta$ y $-\alpha$).
Entonces se pueden restar las salidas del tren de retardo $x[n] - x[n-2]$ y luego multiplicar por α; de la misma manera $x[n-1] - x[n-3]$ se multiplica por β. Las salidas de los dos multiplicadores se suman para dar la salida $y[n]$.

(g) En punto fijo sólo se introducen errores de redondeo en las multiplicaciones. El modelo lineal para estos errores es un proceso IID uniforme sumado a la salida de cada multiplicador. Cada proceso IID es independiente de la señal y entre ellos, y su potencia es $\sigma_e^2 = 2^{-2B}/12$, con $B = 10$ (bits de parte fraccionaria).
En nuestro caso, las salidas de los multiplicadores se suman directamente para dar la salida. Por lo tanto, a la salida habrá un proceso IID con potencia $2\sigma_e^2$. El espectro debido a errores será entonces $G_E(e^{j\theta}) = 2\sigma_e^2$.

Problema 2

(a) $x[n]$ se modela como un proceso blanco a través de un filtro $H_x(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$. Por lo tanto, $G_x(e^{j\theta}) = 1 \cdot |H_x(e^{j\theta})|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, y aplicando Parseval, la potencia de señal será $0,5$. Igualmente para el ruido, el filtro en cuestión es $H_r(z) = A(0.7 - 0.3z^{-1})$. Se llega a $G_r(e^{j\theta}) = 1 \cdot |H_r(e^{j\theta})|^2 = A^2(0,58 - 0,42\cos\theta)$. La potencia de ruido será entonces $0,58\, A^2$.
La SNR_1 será $\frac{0,5}{0,58\, A^2}$. Para $A = 0,1$ vale $SNR_1 = 86,2 = 19,4$dB.

(b) En este caso, para averiguar las potencias, habrá que integrar las densidades espectrales entre $\theta = 0$ y θ_c, la frecuencia de corte. Esto da:

$$SNR_2 = \frac{0,5(\theta_c + \sin\theta_c)}{A^2(0,58\theta_c - 0,42\sin\theta_c)}$$

En el caso particular, vale $SNR_2 = 173,9 = 22,4$dB.

(c) De la tabla de transformadas, la respuesta impulsiva será $h[n] = \frac{\theta_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{\theta_c n}{\pi})$. Para $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$, queda $h[n] = \frac{2}{3}\mathrm{sinc}\frac{2n}{3}$

(d) Ver teórico. Una posibilidad para obtener un filtro de bajo orden y sin oscilaciones de Gibbs ni fluctuaciones en la banda de paso puede ser un filtro de Chebyshev mediante el método de transformación bilineal. De esta forma se obtiene una buena pendiente en la frecuencia de corte, y las fluctuaciones se dejan en la banda de corte únicamente. Como para est aaplicación no es muy crítico el orden del filtro, un orden bajo alrededor de 4 o 6 estaría bien.
Otras respuestas posibles: diseñar un filtro transversal mediante traslación y ventanas. Hay que mencionar el retardo introducido y las ventajas de la ventana elegida. El orden tiene que ser suficiente como para no introducir oscilaciones de Gibbs importantes en la respuesta frecuencial, y tener una pendiente razonable en la frecuencia de corte.

(e)

$$y[n] - x[n] = \alpha x[n-1] + r[n] + \alpha r[n-1]$$
$$= \alpha(a[n-1]/2 + a[n-2]/2) + 0,7Ab[n] - 0,3Ab[n-1] + \alpha A(0,7b[n-1] - 0,3b[n-2])$$
$$= \alpha(a[n-1]/2 + a[n-2]/2) + 0,7Ab[n] + A(0,7\alpha - 0,3)b[n-1] - 0,3\alpha Ab[n-2]$$
$$\mathbb{E}\{(y[n] - x[n])^2\} = \alpha^2/2 + 0,7^2A^2 + (0,7\alpha - 0,3)^2A^2 + 0,3^2A^2\alpha^2$$

Derivando con respecto a α, queda:

$$d\mathbb{E}/d\alpha = \alpha(1 + 1,16A^2) - 0,42A^2$$

Sustituyendo el valor de A e igualando a 0 para hallar el mínimo:

$$\alpha = \frac{0,42}{100 + 1,16} = 0,004$$