Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

25 de febrero de 2011

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Requerimiento de aprobación: responder correctamente la pregunta y un ejercicio completo.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación duciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

Enunciar y demostrar el teorema del muestreo.

Problema 1

$x[n]$ son muestras de una señal de voz tomada a 8000 muestras por segundo.
Para eliminar interferencias en las frecuencias altas y bajas donde no hay potencia de señal, se decide filtrar $x[n]$ mediante un FIR $H(e^{j\theta})$ (causal) con ceros en $z = +1$ y $z = -1$.
Para tratar de aplanar la respuesta frecuencial en la banda central, se agregan otros 2 ceros en $z = \pm j\alpha$.

(a) Dibujar el diagrama completo de ceros y polos y ceros de H.

(b) Hallar la respuesta frecuencial de H. Notar que como está especificado, el filtro queda determinado a menos de constante multiplicativa β. Considerar $\beta = 1$ en las siguientes partes.

(c) Hallar $h[n]$, respuesta al impulso de H.

(d) Estudiar estabilidad y linealidad de fase de H.

Como criterio para encontrar α, interesa que la respuesta frecuencial de H tenga igual módulo en frecuencias $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/4$.

(e) Calcular posibles valores de α, y bosquejar las respuestas al impulso resultantes.

(f) Observando la respuesta anterior, u observando el diagrama de ceros y polos, o calculando, elegir el valor de α que resulte en menor retardo de grupo.

(g) Para el caso elegido, calcular el factor multiplicativo β para que la respuesta en módulo en los 3 puntos de interés valga 1.

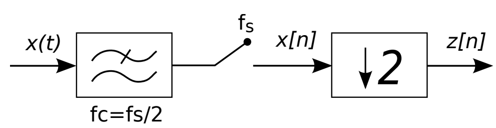
(h) Bosquejar respuesta en módulo del filtro resultante.

Problema 2

En cierta aplicación industrial es de interés monitorear en tiempo real un determinado proceso $x(t)$. Luego de analizar el problema el equipo de ingenieros verifica que las muestras del proceso $x[n]$ obtenidas a una frecuencia de muestreo f_s cumplen con el siguiente modelo:

$$x[n] = \alpha \cdot x[n-1] + v[n]$$

con $\alpha \geq 0$ real y $v[n]$ un proceso gaussiano de media nula y potencia σ_v^2, no correlacionado muestra a muestra (ruido blanco).
Al momento de poner en funcionamiento el monitoreo se verifica que el equipamiento que se dispone para procesar las muestras no puede trabajar a una frecuencia f_s por lo que es necesario submuestrear por un factor de 2.



(a) Verificar que el proceso $z[n]$ cumple un modelo similar al de $x[n]$ de la forma:

$$z[n] = \hat{\alpha} z[n-1] + \hat{v}[n]$$

(b) Hallar los valores correspondientes a $\hat{\alpha}$ y $\hat{v}[n]$ en función de α y $v[n]$.

(c) Hallar la potencia de $\hat{v}[n]$ en función de α y σ_v^2.

(d) Hallar la autocorrelación de $\hat{v}[n]$ en función de α y σ_v^2. Explicar por qué $\hat{v}[n]$ no es ruido blanco.

(e) Hallar la densidad espectral de potencia de $\hat{v}[n]$ en función de α y σ_v^2. Bosquejar.

Se desea analizar qué condición se debe cumplir para que sea válido modelar en forma aproximada a $\hat{v}[n]$ como ruido blanco. Para ello es necesario que su densidad espectral sea aproximadamente constante.

(f) Hallar el rango de valores de α y σ_v^2 para el cual el apartamiento de la densidad espectral de potencia de su valor medio no supera el 10 %.

Solución

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a) H tiene 4 ceros en total: $z = \pm 1$ y $z = \pm j\alpha$.
También hay un polo de orden 4 en $z = 0$ (los términos $1 - c_i z^{-1}$ introducen cada uno un cero y un polo en 0; o también puede verse que hay un término z^{-4} en la expansión de $H(z)$).

(b) $H(z) = \beta(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - j\alpha z^{-1})(1 + j\alpha z^{-1}) = 1 + (\alpha^2 - 1)z^{-2} - \alpha^2 z^{-4}$
Evaluando en la circunferencia unidad, $H(e^{j\theta}) = 1 + (\alpha^2 - 1)e^{-2j\theta} - \alpha^2 e^{-4j\theta}$

(c) De $H(z)$ se identifica $h[n] = \delta[n] + (\alpha^2 - 1)\delta[n-2] - \alpha^2\delta[n-4]$.

(d) Un FIR es siempre estable.
El filtro sólo puede ser de fase lineal (FIR tipo III con coeficientes 1,0,0,0,-1) si $\alpha^2 = 1$, caso trivial que no tiene sentido considerar porque daría respuesta frecuencial 0 en frecuencia $\pi/2$. Por lo tanto, no es de fase lineal.

(e) La respuesta frecuencial es simétrica alrededor de $\pi/2$; esto se puede ver de la disposición simétrica de ceros y polos. Por lo tanto la respuesta en $\pi/4$ y $3\pi/4$ serán iguales en módulo. Entonces hay que igualar $|H(e^{j\pi/4})|$ con $|H(e^{j\pi/2})|$. Las soluciones son las raíces del polinomio $1 - 4\alpha^2 + \alpha^4$, que son $\alpha = \pm 1.93$ y $\alpha = \pm 0.518$.
El signo de α es irrelevante; no afecta el diagrama de ceros y polos (notar que en $h[n]$ siempre aparece α^2).
Las respuestas al impulso son respectivamente:

$$h_1[n] = [1.00000\ 0\ 2.73205\ 0\ -3.73205]$$

$$h_2[n] = [1.00000\ 0\ -0.73205\ 0\ -0.26795]$$

(f) Claramente h_2 posee su energía concentrada más cerca de $n = 0$ mientras que h_1 la tiene hacia el final de la respuesta al impulso. Por lo tanto h_2 dará menor retardo de grupo.
En el diagrama de ceros y polos, h_2 posee todos los ceros dentro del círculo unidad, solución que es de fase mínima y por lo tanto con menor retardo de grupo.

(g) $|H(e^{j\pi/2})| = \beta \times 2(1 - \alpha^2) = \beta \times 1.4641$, por lo tanto debe ser $\beta = 0.683$.

(h) La respuesta frecuencial vale 0 en frecuencias 0 y π; y vale 1 en frecuencias $\pi/4$, $\pi/2$ y $3\pi/4$. En $\pi/2$ hay un mínimo relativo, y hay 2 máximos relativos entre esta frecuencia y las otras 2.

Problema 2

(a) Por un lado tenemos:

$$z[n] = x[2n] = \alpha \cdot x[2n-1] + v[2n]$$

Aplicando el modelo y operando tenemos:

$$x[2n] = \alpha \cdot (\alpha \cdot x[2n-2] + v[2n-1]) + v[2n]$$

$$x[2n] = \alpha^2 \cdot x[2n-2] + \alpha \cdot v[2n-1] + v[2n]$$

De esta forma llegamos a que:

$$z[n] = \alpha^2 \cdot z[n-1] + \alpha \cdot v[2n-1] + v[2n]$$

(b) De las ecuaciones:

$$x[n] = \alpha \cdot x[n-1] + v[n]$$

$$z[n] = \hat{\alpha} \cdot z[n-1] + \hat{v}[n]$$

se llega a que $\hat{\alpha} = \alpha^2$ y $\hat{v}[n] = \alpha \cdot v[2n-1] + v[2n]$.

(c)

$$\hat{v}[n] = \alpha \cdot v[2n-1] + v[2n]$$

$$\sigma_{\hat{v}}^2 = (\alpha^2 + 1) \cdot \sigma_v^2$$

(d) Había un error en la solución que no nos dimos cuenta cuando se planteó el problema. En efecto el problema queda con una solución trivial puesto que el ruido del modelo queda nuevamente blanco. Esto hace que las últimas partes tengan soluciones triviales.

$$\hat{v}[n] = \alpha \cdot v[2n-1] + v[2n]$$

$$R_{\hat{v}}[m] = E\{\hat{v}[n] \cdot \hat{v}[n+m]\}$$

$$R_{\hat{v}}[m] = E\{(\alpha \cdot v[2n-1] + v[2n])(\alpha \cdot v[2n+2m-1] + v[2n+2m])\}$$

Observando los términos cruzados se ve que sólo sobreviven términos no nulos en el caso de $m = 0$ por lo que el ruido queda blanco con autocorrelación:

$$R_{\hat{v}}[m] = (\alpha^2 + 1) \cdot \sigma_v^2 \cdot \delta[m]$$

El proceso $\hat{v}[n]$ es blanco, pues la autocorrelación es no nula sólo en $m = 0$.

(e) La densidad espectral de potencia queda constante:

$$G(e^{j\theta}) = (\alpha^2 + 1) \cdot \sigma_v^2$$

(f) No importa qué valores tome α o σ_v^2, el ruido siempre es blanco por lo que tiene densidad espectral de potencia constante.