Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

20 de diciembre de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Requerimiento de aprobación: responder correctamente la pregunta y un ejercicio completo.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación duciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

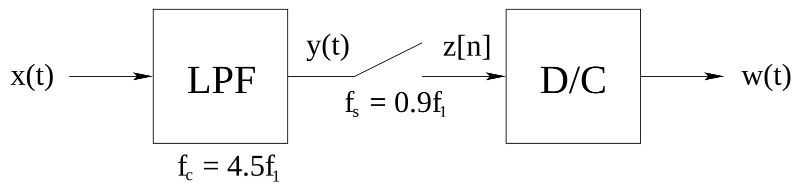
Pregunta

Sea $x[n]$ un proceso estacionario con autocorrelación $R_x[n]$ y densidad espectral de potencia $G_x(e^{j\theta})$; $H(e^{j\theta})$ un filtro estable; e $y[n]$ el proceso x filtrado por H. Probar que la densidad espectral de potencia de y, $G_y(e^{j\theta})$, viene dada por la siguiente expresión:

$$G_y(e^{j\theta}) = G_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2$$

Problema 1

En este problema se estudiará un sistema utilizado en osciloscopios para analizar señales periódicas de frecuencias mayores a las que puede manejar la electrónica utilizada. El sistema propuesto es:



donde $x(t)$ es una señal periódica de período $T_1 = 1/f_1$; f_c es la frecuencia de corte del filtro pasabajos; f_s es la frecuencia de muestreo; y el bloque D/C es un reconstructor ideal. Se asumirá, para simplificar, que no hay ruido sumado a la señal.

(a) Bosqueje los espectros de $x(t)$, $y(t)$, $z[n]$ y $w(t)$ cuando $x(t) = x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$. Indique como queda $w(t)$ en el tiempo.

(b) Encuentre el espectro de $x_2(t) = \sum_k \Lambda\left(\frac{t-kT_1}{T_1/2}\right)$.
Sugerencia: expresar $x_2(t)$ *como* $\Lambda\left(\frac{t}{T_1/2}\right) * \sum_k \delta(t-kT_1)$

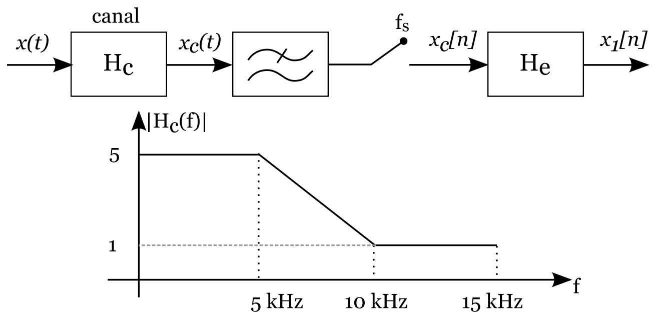
(c) Bosqueje los espectros en $y(t)$, $z[n]$ y $w(t)$ cuando $x(t) = x_2(t)$.

(d) ¿Cómo queda $w(t)$ en el tiempo? Bosquejar.

(e) Modifique el sistema para obtener el doble de resolución, esto es, poder analizar el doble de componentes del espectro.

Problema 2

Una señal de audio $x(t)$ de ancho de banda 15 kHz es transferida a través de un canal que tiene una respuesta en frecuencia $H_c(f)$, recibiéndose $x_c(t)$ a la salida del canal como se muestra en la figura. Se desea recuperar la señal $x(t)$ en tiempo discreto, por lo que se filtra la señal muestreada $x_c[n]$ con un filtro ecualizador H_e que compensa los efectos del filtro H_c. En la salida de H_e se obtiene una secuencia $x_1[n]$ que deberá ser lo más parecida posible a $x[n]$, muestras de x(t).



(a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo f_s para que el sistema funcione correctamente. Indicar la función del filtro pasabajos y hallar su frecuencia de corte.

En el resto del ejercicio se utilizará la frecuencia de muestreo f_s hallada en la parte anterior.

(b) Hallar la respuesta en frecuencia de un filtro en tiempo discreto $H_c(e^{j\theta})$ cuyos efectos sean los mismos que produce $H_c(f)$, de modo de poder estudiar todo el sistema en tiempo discreto.

El filtro H_e será real, causal, y de la forma

$$H_e(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}$$

Idealmente el filtro H_e cumpliría:

$$|H_c(e^{j\theta})H_e(e^{j\theta})| = 1$$

(c) Hallar a y b de forma que $|H_c(e^{j\theta})H_e(e^{j\theta})| = 1$ en las frecuencias $\pi/2$ y π.

(d) Dar un diagrama de bloques del filtro $H_e(z)$, estudiar la estabilidad del filtro obtenido y bosquejar su respuesta en frecuencia.

A los efectos de comprobar el funcionamiento del filtro se considera un proceso $x(t)$ con potencia σ_x^2 y densidad espectral de potencia constante hasta 15 kHz.

(e) Bosquejar la densidad espectral de potencia en cada uno de los puntos intermedios del sistema.

(f) Hallar la potencia del proceso $x_c[n]$.

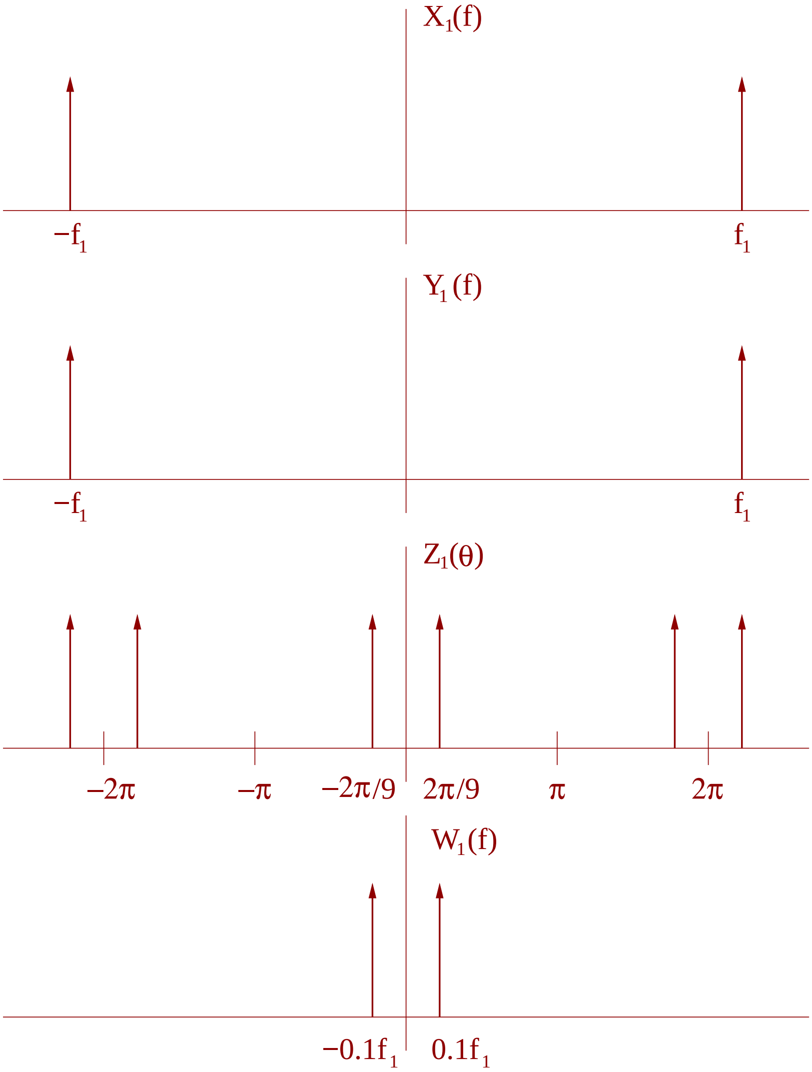
Solución

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a)



Antitransformando $W_1(f)$ encontramos $w_1(t)$

$$w(t) = \cos(2\pi 0.1 f_1 t)$$

(b)

$$x_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T_1/2}\right) * \sum_k \delta(t - kT_1)$$

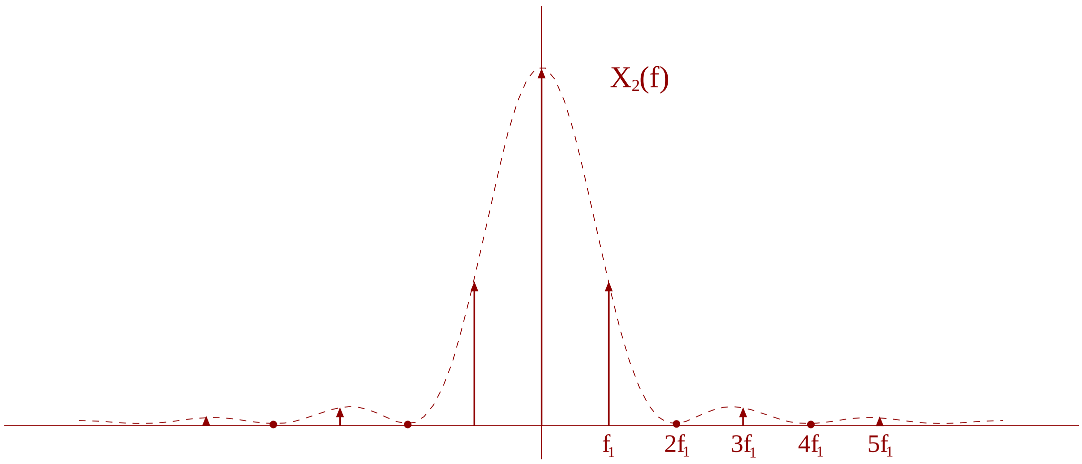
Aplicando la transformada de Fourier obtenemos:

$$\frac{T_1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T_1}{2}f\right) \cdot \frac{1}{T_1}\sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_1}\right)$$

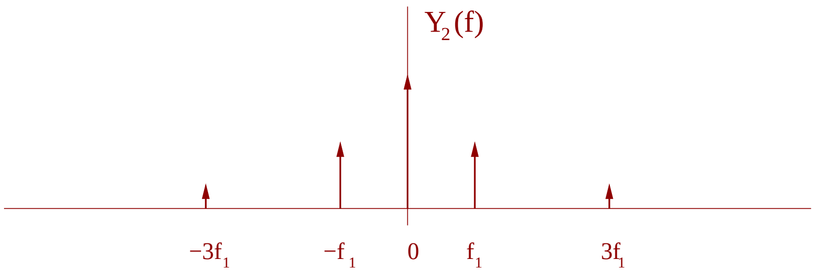
Por lo tanto,

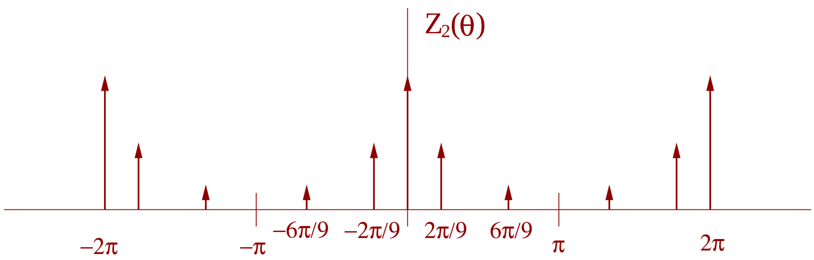
$$X_2(f) = \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{f}{2f_1}\right) \cdot \sum_k \delta(f - kf_1)$$

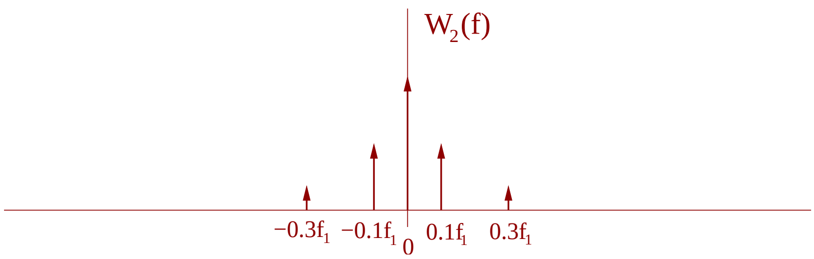
que es la expresión de la serie de Fourier como un espectro de tiempo continuo con deltas. Las componentes con k par son nulas, excepto para $k = 0$.



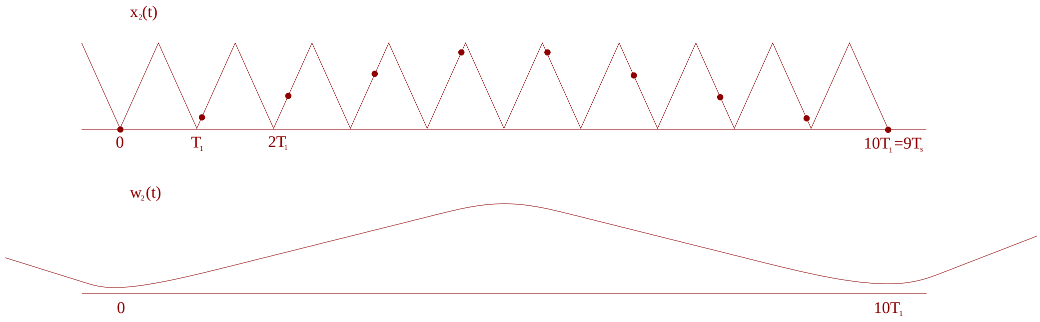
(c)







(d) Los componentes de la serie de Fourier de $w_2(t)$ son iguales a los de $y_2(t)$, excepto por una homotecia de las frecuencias. Esta homotecia en las frecuencias se corresponde con otra en el tiempo. En $y_2(t)$ la frecuencia fundamental es f_1 mientras que en $w_2(t)$ la fundamental es $f_1/10$. De esto se deduce que, mientras que el período de $y_2(t)$ es T_1, el período de $w_2(t)$ es $10 \cdot T_1$. La forma es esencialmente los triángulos de la señal $x_2(t)$, pero con algunas deformaciones debidas al truncamiento de las componentes de su serie de Fourier.



(e) El doble de resolución se logra cambiando la frecuencia de corte del pasabajos a $f_c' = 9f_1$ y la frecuencia de muestreo a $f_s' = 0.95f_1$.

Problema 2

(a)

$$f_s = 30 \text{ kHz}$$

El filtro tiene frecuencia de corte 15 kHz y debe estar para asegurar que se cumpla el teorema de muestreo para cualquier señal de entrada.

(c) Se tiene que $|H_c(e^{j\pi/2})||H_e(e^{j\pi/2})| = 1$ entonces $3|H_e(e^{j\pi/2})| = 1$ obteniendo

$$\left|\frac{b}{1+aj}\right| = \frac{1}{3}$$

$$9b^2 = 1 + a^2$$

Por otro lado $|H_c(e^{j\pi})||H_e(e^{j\pi})| = 1$

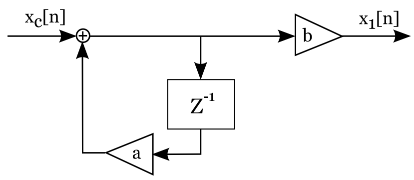
$$H_c(-1) = \frac{b}{1+a} = 1$$

De ambas condiciones se obtiene la ecuación

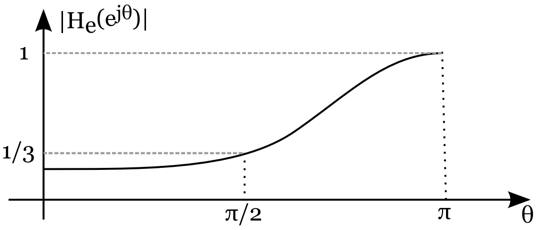
$$8a^2 + 18a + 8 = 0$$

La ecuación tiene dos soluciones. La solución $a = -1.64$ corresponde a un sistema causal inestable y la solución $a = -0.61$ y $b = 1.61$ corresponde a un sistema causal estable.

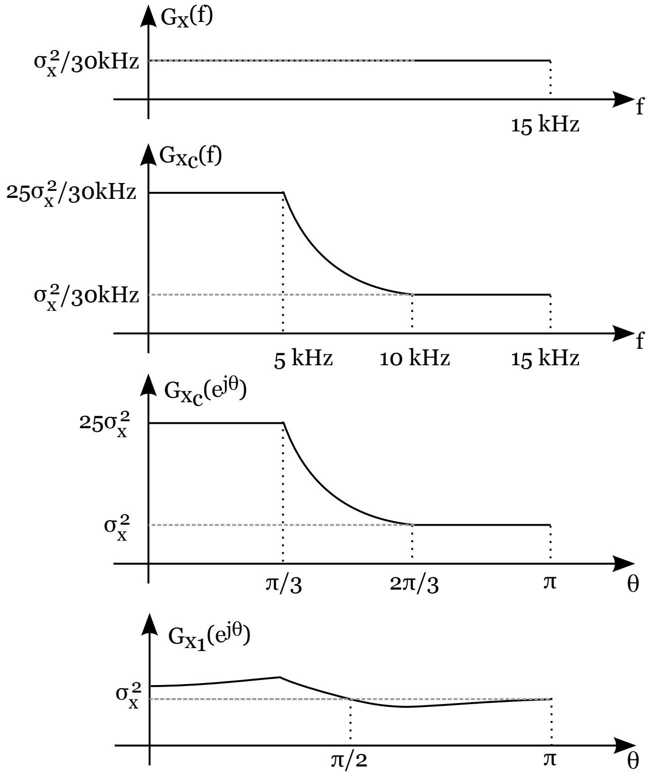
(d)



La solución correspondiente a $a = -1.64$ tiene un polo fuera del círculo unidad por lo que la región de convergencia correspondiente al filtro causal no es estable.
La solución correspondiente a $a = -0.61$ y $b = 1.61$ tiene un polo dentro del círculo unidad por lo que la región de convergencia correspondiente al filtro causal es estable.
En la figura se bosqueja la respuesta en frecuencia del filtro.



(e)



(f) La potencia de $x_c[n]$ se puede cacular a partir de la densidad espectral de potencia

$$\sigma_{x_c}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{x_c}(e^{j\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} G_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

$$\sigma_{x_c}^2 = \sigma_x^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/3}|H(e^{j\theta})|^2 d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}|H(e^{j\theta})|^2 d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi}|H(e^{j\theta})|^2 d\theta\right)$$

$$\sigma_{x_c}^2 = \sigma_x^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/3} 25 d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}(9-\frac{12}{\pi}\theta)^2 d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi} 1 d\theta\right)$$

$$\sigma_{x_c}^2 = \sigma_x^2\left(\frac{25}{3} + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}(9-\frac{12}{\pi}\theta)^2 d\theta + \frac{1}{3}\right)$$

$$\sigma_{x_c}^2 = (25/3 + 10.8/\pi + 1/3)\sigma_x^2 = 12.1\sigma_x^2$$