# Muestreo y procesamiento digital
# Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

10 de julio de 2010

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Requerimiento de aprobación: responder correctamente la pregunta y un ejercicio completo.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación duciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

## Pregunta

(a) Explicar brevemente en qué consiste decimar (submuestrear) e interpolar (sobremuestrear) una señal discreta. Dibujar un ejemplo para cada caso.

(b) Dar el diagrama de bloques de un decimador de orden M, indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Hallar la expresión del espectro resultante.

(c) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada con $X(e^{j\theta}) = \Lambda(\theta/\frac{2\pi}{3})$ y M = 3.

(d) Dar el diagrama de bloques de un interpolador de orden L, indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Hallar la expresión del espectro resultante.

(e) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada con $X(e^{j\theta}) = \Lambda(\theta/\frac{2\pi}{3})$ y L = 3.

## Problema 1 [25 pts.]

El filtro digital $H$ es causal, con respuesta al impulso $h[n]$ real, con transferencia:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2} - 0.729z^{-3}}$$

Dos polos del sistema están sobre el eje imaginario.

(a) Calcular ceros y polos del sistema, dar diagrama de ceros y polos.

(b) Estudiar la estabilidad del filtro $H$.

(c) Bosquejar aproximadamente la respuesta frecuencial en módulo de $H$. Identificar y justificar puntos notables.

El filtro $H$ se implementa como dos filtros en cascada: $H_1$ de orden 1 y $H_2$ de orden 2. $H_1$ y $H_2$ son filtros de coeficientes reales.

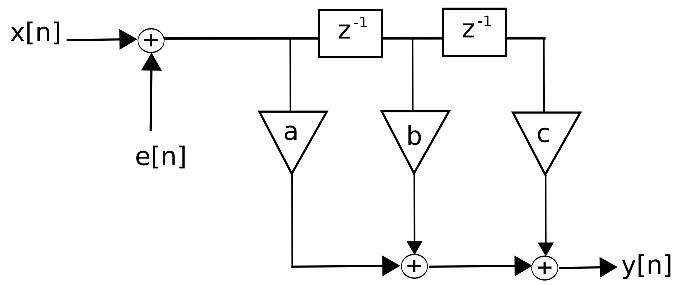
(d) Proponer una implementación (diagrama de bloques) para cada uno de estos filtros.

(e) Calcular la respuesta al impulso de $H_1$ y $H_2$.

(f) Si las operaciones se realizan en punto fijo, con 16 bits de parte fraccional, ¿en qué orden deben colocarse estos dos filtros para minimizar la potencia de ruido generado por errores de redondeo en las operaciones?

## Problema 2

(a) Se considera el filtro digital real de la siguiente figura. Hallar condiciones en los parámetros del filtro para que éste **no** presente distorsión de fase. Para este caso, hallar la respuesta en frecuencia del mismo. Observar que el retardo de grupo del filtro es de una muestra.




(b) Al filtro de la parte (a) se aplicará la señal $x[n]$, que llega contaminada con ruido blanco aditivo de potencia $\sigma_N^2$, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El objetivo del filtro es recuperar la señal.

Hallar los coeficientes teniendo en cuenta las dos condiciones siguientes:

i. Las condiciones halladas en la parte (a).

ii. La respuesta en frecuencia cero es 1.

iii. Que la salida sea lo más similar posible a la señal original $x[n]$, tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido. Es decir, teniendo en cuenta la observación hecha sobre el retardo de grupo, se deberá minimizar:

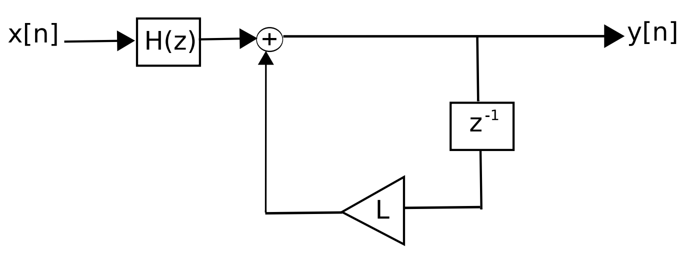
$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\left\{(y[n] - x[n-1])^2\right\}$$

**Datos:** El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \left(\delta[n] + \frac{\delta[n-1] + \delta[n+1]}{2}\right) \qquad \sigma_x^2 = \sigma_N^2$$

(c) Dar el modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto fijo* y se utiliza *redondeo*. Justificar.

Se considera el filtro de la siguiente figura donde $H(z)$ corresponde a la transferencia del filtro de la parte (a).




(d) Calcular la potencia de "ruido de operaciones" a la salida del segundo filtro, para una representación con punto fijo y redondeo, con coeficientes genéricos. Se debe fundamentar correctamente todos los pasos.

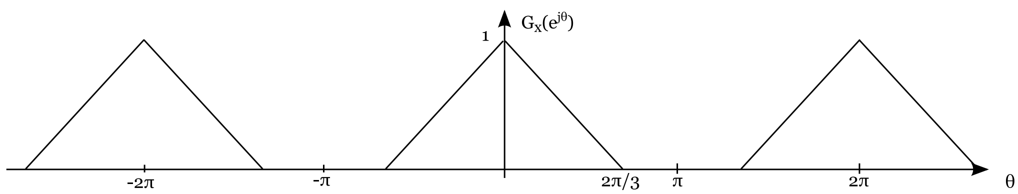
# Solución

## Pregunta

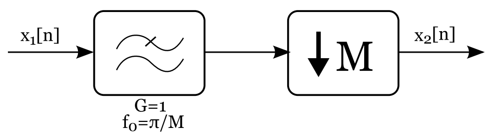
**(a)** Decimar (por un factor entero): Consiste en quedarse una de cada M muestras de la señal previamente limitada en banda a $\pi/M$, lo que resulta en una menor frecuencia de muestreo. Sobremuestrear: Se interpolan valores intermedios de la secuencia muestreada de manera de aumentar la frecuencia de muestreo.

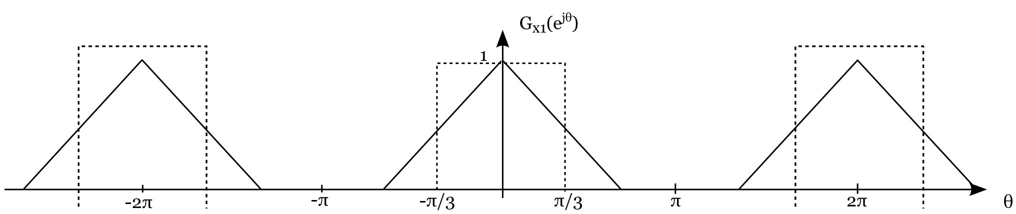
**(b)** El decimador consiste en un filtro pasabajos de ganancia unitaria y frecuencia de corte $\pi/M$, seguido de un compresor de factor M.
$X_M(e^{j\theta}) = X(e^{j\frac{\theta}{M}})$ para $-\pi < \theta < \pi$, y periodizado cada $2\pi$.

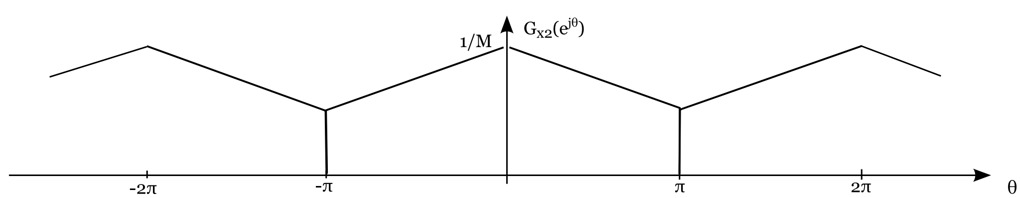
**(c)** La densidad espectral de potencia de $x$ es:




Y las gráficas de las densidades espectrales de $x_1$ y $x_2$ indicados en el diagrama de bloques son:

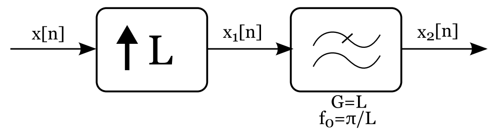


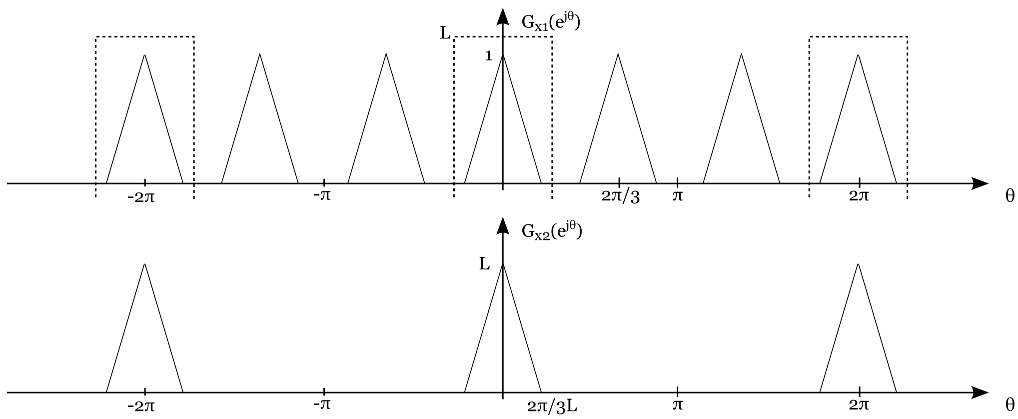




**(d)** El interpolador consiste en un expansor de factor L seguido de un filtro pasabajos de ganancia L y frecuencia de corte $\pi/L$.
$X_L(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta L})$ para $-\pi/L < \theta < \pi/L$ y 0 hasta frecuencia $\pm\pi$, todo periodizado cada $2\pi$.

**(e)** Las gráficas de las densidades espectrales de $x_1$ y $x_2$ indicados en el diagrama de bloques son:



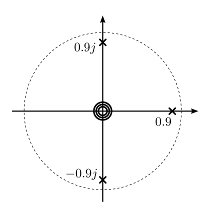




# Problema 1

**(a)** De la forma de $H(z)$ se ve que es un sistema con tres ceros y tres polos (el denominador es de orden 3). Como el filtro es real, los polos deben ser pares complejos conjugados, o bien estar sobre el eje real. Entonces, en nuestro caso, habrá 2 polos imaginarios (como sugiere la letra), y uno real.
Planteando $H$ de esa forma,

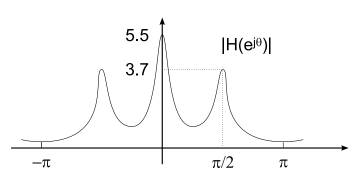
$$H(z) = \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-j\beta z^{-1})(1+j\beta z^{-1})} = \frac{z^3}{(z-\alpha)(z-j\beta)(z+j\beta)},$$

e igualando coeficientes, se llega a $\alpha = \beta = 0.9$.
El diagrama de ceros y polos será entonces:




**(b)** Los 3 polos se encuentran dentro del círculo unidad, y se trata de un sistema causal, por lo tanto es estable.

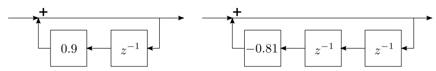
**(c)** Tenemos 3 polos con módulo 0.9, en frecuencias $\pm\pi/2$ y 0. Cada polo por separado tendrá entonces una respuesta frecuencial con una resonancia a esa frecuencia (ganancia 10, ya que la distancia al círculo unidad es 1/10), y en la frecuencia opuesta una ganancia mínima de aproximadamente 1/2 (la distancia entre el polo y el círculo unidad en la frecuencia opuesta es 1.9). La caída 3dB estará aproximadamente a 0.1 radianes de la frecuencia de resonancia (a esa frecuencia, la distancia al polo es $0.1 \times \sqrt{2}$). A $\pi/2$ radianes de la frecuencia de resonancia, la ganancia será algo menor a $1/\sqrt{2} \approx 0.7$ (el valor exacto sería $1/\sqrt{1+0.9^2} = 1/1.3454 = 0.7433$).
La ganancia total será el producto de estos 3 componentes. La ganancia en $\theta = 0$ será entonces $10/(1.3454)^2 = 5.5$. La ganancia en $\theta = \pm\pi$ sera $10/(2 \times 1.3454) \approx 3.7$.



**(d)** Para que los filtros sean reales, debemos agrupar los 2 polos complejos conjugados en un mismo filtro.
Entonces será:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + 0.81z^{-2}}$$

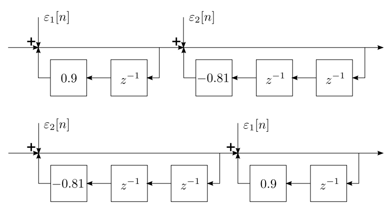



**(e)**

$$h_1[n] = u[n]0.9^n$$

Separando $H_2(z)$ en fracciones simples, queda $H_2(z) = \frac{0.5}{1+j0.9z^{-1}} + \frac{0.5}{1-j0.9z^{-1}}$. La respuesta al impulso será entonces $h_2[n] = 0.5\ u[n]\ 0.9^n\ j^n\ (1 + (-1)^n)$. El último factor vale 2 para $n$ par, y 0 para $n$ impar. Entonces será $h_2[2k] = u[k]\ 0.81^k(-1)^k$, y $h_2[2k+1] = 0$.
Otra forma más fácil de llegar a este resultado es resolviendo la ecuación de recurrencia de $H_2$ (simplemente observando cómo evolucionaría un impulso a la entrada) para varios valores de n, e identificando factores. En efecto, cada 2 muestras, aparece la salida anterior multiplicada por -0.81.

**(f)** El error introducido en las operaciones en punto fijo se modelan como un proceso blanco aditivo a la salida de los productos.
Los 2 órdenes posibles para los filtros, incluyendo el modelo de errores serán entonces:




Llamando $\sigma_e^2$ a la potencia de cada uno de los errores, la potencia de los errores a la salida será, para el caso $H_1 \rightarrow H_2$,

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_e^2 \cdot (\sum |h[n]|^2 + \sum |h_2[n]|^2)$$

y para el caso $H_2 \rightarrow H_1$,

$$\sigma_{21}^2 = \sigma_e^2 \cdot (\sum |h[n]|^2 + \sum |h_1[n]|^2)$$

$\sum |h[n]|^2$ no hace falta calcularlo, porque aparece sumado en los 2 casos. $\sum |h_2|^2$ es una geométrica con factor menor que $\sum |h_1|^2$. Por lo tanto, convendrá el primer caso: primero el filtro $H_1$, y luego el filtro $H_2$.

# Problema 2

**(a)** Para que el filtro no presente distorción de fase, la respuesta en frecuencia del mismo debe ser de fase lineal. En este caso se tiene que la respuesta en frecuencias del filtro está dada por

$$H(e^{j\theta}) = a + be^{-j\theta} + ce^{-j2\theta}$$

Recordar que para que un filtro FIR sea de fase generalizada, es necesario que la respuesta al impulso sea simétrica respecto de su punto medio. Esto implica que $a = c$. Por lo tanto la respuesta en frecuencias queda

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}(b + 2a\cos\theta)$$

Para que la fase sea lineal $b + 2a\cos\theta$ no debe cambiar de signo.

**(b)** Imponiendo la segunda condición tenemos que

$$b + 2a = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a$$

La salida esta dada por

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n-2] + an[n] + bn[n-1] + cn[n-2]$$

donde $n$ es el ruido aditivo.
Utilizando la relacion entre $a$ y $b$ hallada tenemos que

$$y[n] - x[n-1] = s_x[n] + s_n[n]$$

donde

$$s_x[n] = a(x[n] - 2x[n-1] + x[n-2])$$

$$s_n[n] = a(n[n] - 2n[n-1] + n[n-2]) + n[n-1]$$

Observar que, como $x[n]$ y $n[n]$ son independientes, también lo serán $s_x[n]$ y $s_n[n]$. Por lo tanto

$$\epsilon^2 = E\{(s_x[n] + s_n[n])^2\} = E\{s_x[n]^2\} + E\{s_n[n]^2\}$$

Luego realizando las cuentas correspondientes

$$\epsilon^2 = 6a^2\sigma_x^2 - 4a^2 R_x[1] + (6a^2 - 4a^2 + 1)\sigma_x^2$$

Por lo tanto utilizando que $R_x[1] = \sigma_x^2/2$ y operando se tiene

$$\epsilon^2 = \sigma_x^2(8a^2 - 4a + 1)$$

Para obtener el mínimo igualamos la derivada de $\epsilon(a)$ respecto de $a$ a cero. Es claro que este punto corresponde a un mínimo de dicha función. Realizando dichos cálculos se llega a que $a = 1/4$, lo que implica que $b = 1/2$. Observar que esto garantiza que el sistema no distorsiona la fase ya que $b > a$.

**(c)** Ver teórico.

**(d)** Debido a los errores en las operaciones en punto fijo aparecen ruidos 4 ruidos, uno por cada multiplicador.
Los ruidos debidos a los multiplicadores del filtro $H$ pueden pensarse como aplicados a la salida de $H$. Por otro lado el ruido debido al multiplicador restante puede pensarse aplicado a la entrada de la última etapa del filtro, es decir en el mismo punto que los anteriores. De lo anterior se deduce que el ruido a la salida, $y_e$, será la salida que se obtiene al pasar la suma de los cuatro ruidos por la última etapa de filtrado. Por lo que se tiene que

$$E\{y_e[n]^2\} = \sum_{i=1}^{4} E\{y_e[n]^2\} = 4\sigma_{yei}$$

donde $\sigma_{yei}$ es la potencia de la señales $y_{ei}$. Notar que estas coinsiden para todo $i$.
La transferencia de la etapa final está dada por

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - Lz^{-1}}$$

Por lo que la respuesta al impulso viene dada por

$$h_2[n] = L^{-n}u[n]$$

de donde la potencia a la salida debida a cada ruido es

$$\sigma_{yei}^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2[n]^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - L}$$

La potencia total del ruido debido a las operaciones es

$$\sigma_{ye}^2 = \frac{4\sigma_e^2}{1 - L}$$