Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

24 de febrero de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

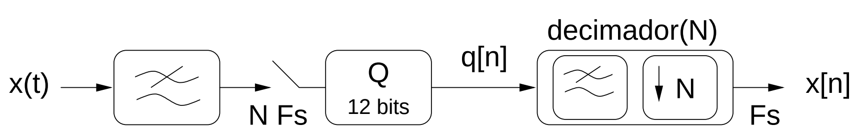
Pregunta

Sea $x[n]$ un proceso estacionario con autocorrelación $R_x[n]$ y densidad espectral de potencia $G_x(e^{j\theta})$; $H(e^{j\theta})$ un filtro estable; e $y[n]$ el proceso x filtrado por H. Probar que la densidad espectral de potencia de y, $G_y(e^{j\theta})$, viene dada por la siguiente expresión:

$$G_y(e^{j\theta}) = G_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2$$

Problema 1

La señal $x(t)$ es de banda limitada $f_s/2$ y es tal que, al utilizar el cuantizador Q de 12 bits de resolución, se cumple el modelo de cuantización como ruido blanco aditivo.



(a) Dar los espectros de señal y ruido en todos los puntos del sistema.

(b) Calcular el valor de N que resulte en el sistema menos complejo posible, y con una relación señal a ruido de cuantización en $x[n]$ no menor que si se hubiese usado únicamente un cuantizador de 14 bits luego del muestreo.

Si se utiliza un valor de N muy elevado, deja de valer el modelo de ruido aditivo blanco.

(c) Explicar por qué sucede esto, y cuáles de las hipótesis del modelo dejarían de valer.

Una forma de evitar este problema consiste en sumar a la señal muestreada, antes del cuantizador, un proceso $r[n]$ independiente de la señal.

(d) Indicar cómo esta señal agregada puede volver válida la hipótesis perdida.

(e) Dar aproximadamente la potencia necesaria de este proceso, y su espectro para que $x[n]$ no sea afectada por $r[n]$.

Problema 2

Muchas veces es desable utilizar filtros de fase 0. Para procesamiento de señales almacenadas previamente (no tiempo real) se pueden utilizar los dos siguientes métodos.
Sea $h[n]$ un filtro causal real, y $x[n]$ la entrada a filtrar, e $y[n]$ la salida de todo el sistema.

Método A: sea $g_A[n]$ el resultado de filtrar $x[n]$ con el filtro h. Luego, se invierte en el tiempo este resultado (es decir, se toma $g_A[-n]$) y se lo filtra nuevamente con h para obtener $r_A[n]$. La salida $y_A[n]$ será $r_A[-n]$ (r_A invertida).

(a) Determinar la respuesta al impulso de todo el sistema ($h_A[n]$) que relaciona la entrada x con la salida y_A.

(b) Determinar el módulo de la respuesta frecuencial $|H_A(e^{j\theta})|$ y expresarlo en términos de $|H(e^{j\theta})|$ y $\angle H(e^{j\theta})$.

Método B: sea $g_B[n]$ el resultado de filtrar $x[n]$ con el filtro h. Sea $r_B[n]$ el resultado de filtrar la entrada invertida $x[-n]$ con el filtro h. La salida $y_B[n]$ será la suma de estas dos señales, con r_B nuevamente invertida: $y_B[n] = g_B[n] + r_B[-n]$.

(c) Demostrar que este sistema (h_B) tiene fase 0 (salvo eventuales cambios de signo).

(d) Determinar el módulo de la respuesta frecuencial $|H_B(e^{j\theta})|$ y expresarlo en términos de $|H(e^{j\theta})|$ y $\angle H(e^{j\theta})$.

Sea el filtro digital $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$.

(e) Calcular $H_{1A}(e^{j\theta})$, respuesta frecuencial de aplicar el método A al filtro h_1.

(f) Calcular $H_{1B}(e^{j\theta})$, respuesta frecuencial de aplicar el método B al filtro h_1.

Sea el filtro digital $h_2[n] = \alpha^n u[n]$, donde $\alpha = 1/2$.

(g) Calcular $H_{2A}(e^{j\theta})$, respuesta frecuencial de aplicar el método A al filtro h_2.

(h) Calcular $H_{2B}(e^{j\theta})$, respuesta frecuencial de aplicar el método B al filtro h_2.

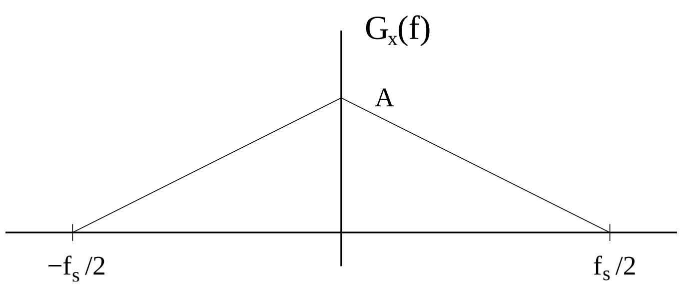
Solución

Pregunta

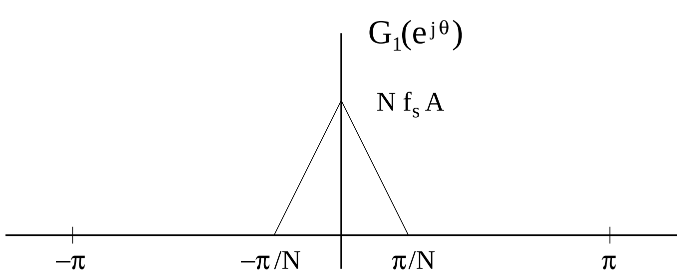
Ver teórico.

Problema 1

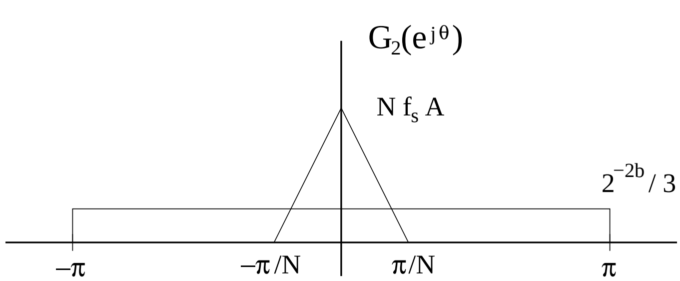
(a) En este ejercicio hay señales y ruido. El ruido debemos trabajarlo como proceso estocástico. No sabemos si la señal es un proceso estocástico o no, pero para poder trabajar a la vez con la señal y con ruido debemos considerarlo como uno. (Tiene poco sentido graficar a la vez transformadas de Fourier de una señal determinada junto a una densidad espectral de potencia.) Por lo tanto todos los espectros que dibujaremos serán densidades espectrales de potencia.
El espectro de la señal lo dibujamos como un triángulo del ancho de banda adecuado para simplificar.



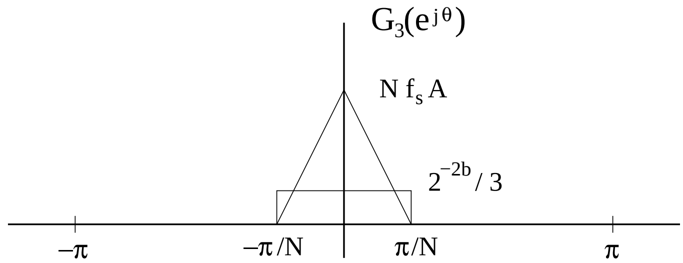
El filtro pasabajos inicial debería tener frecuencia de corte en $f_s/2$ para evitar solapamiento en la señal final del sistema. Como la señal tiene ese ancho de banda no será afectada por este filtro y su espectro será igual.
Luego del muestreo a frecuencia $N\,f_s$ tenemos:



Al cuantizar se suma el ruido de cuantización, de densidad espectral de potencia constante y altura $\frac{\Delta^2}{12} = 2^{-2b}/3$.



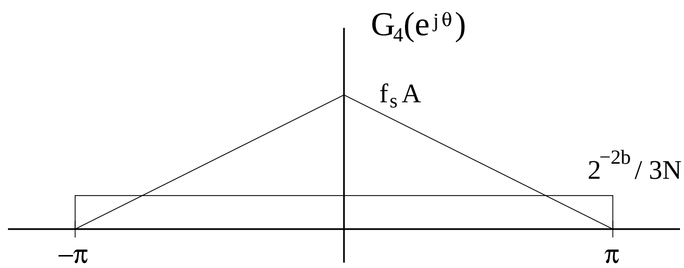
El filtro anterior al decimador debe tener frecuencia de corte $\theta_c = \pi/N$ para evitar el solapamiento y ganacia 1. Luego del filtro y antes del decimador tenemos:



Si un proceso $u[n]$ entra a un decimador de parámetro N, obenemos el proceso $v[n] = u[n\,N]$. Su autocorrelación es

$$R_v[n_1, n_2] = E\{v[n_1]v[n_2]\} = E\{u[n_1\,N]u[n_2\,N]\} = R_u[(n_2 - n_1)N],$$

con lo que v es estacionario, y su autocorrelación es $R_v[n] = R_u[n\,N]$. Como $R_v[n]$ es una secuencia determinística sabemos que luego del decimador su espectro será



(b) La potencia de la señal la llamamos S_x y la potencia del ruido la obtenemos integrando:

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^{-2b}}{3N} d\theta = \frac{1}{3 \cdot N \cdot 2^{2b}}$$

y la relación señal a ruido es:

$$\text{SNR} = S_x \cdot 3 \cdot N \cdot 2^{2b}.$$

Usar 14 bits sin decimación equivale a usar $b = 14$ y$N = 1$, mientras que en el sistema propuesto $b = 12$ y debemos determinar N. Debemos cumplir que

$$S_x \cdot 3 \cdot N \cdot 2^{2 \cdot 12} \geq S_x \cdot 3 \cdot 2^{2 \cdot 14},$$

que implica $N \geq 16$. El sistema menos complejo será el de menor N, por lo tanto

$$N = 6416.$$

Es necesario notar que para lograr esta mejora, luego del decimador, la representación numérica debe ser mejor que la del muestreo. Si estuvieramos restringidos a una representación de 12 bits, eso sería equivalente a poner otro cuantizador y tendríamos el mismo ruido que antes.

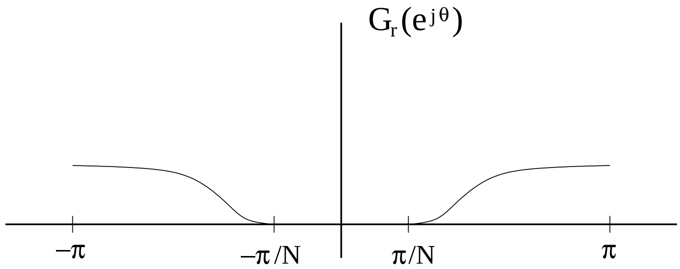
(c) Al crecer N, el ancho de banda de $x(t)$ baja con respecto a $N\,f_s$. Esto hace que las muestras sean cada vez más correlacionadas, hasta que la variación entre muestras sucesivas se hace muy pequeña. Ya no vale que la señal varíe muchos pasos de cuantización entre muestras sucesivas, y entonces el error dejará de ser blanco.

(d) Si $r[n]$ es una señal compleja, con variaciones suficientes como para hacer válido el modelo de ruido, $r[n] + x[n]$ tambien lo será.

(e) La variación debe ser mayor a Δ, por lo que

$$\sigma_r^2 \gg \frac{\Delta^2}{12}.$$

Para quue los efectos de $r[n]$ desaparezcan, el espectro de $r[n]$ se debe concentrar en la banda eliminada por el decimador, es decir, en el rango $[-\pi, -\pi/N]$ y $[\pi/N, \pi]$. A su vez, debe ser de banda ancha para asegurara la complejidad, por lo tanto su espectro debe tener forma similar a:



Problema 2

(a) Invertir la señal antes y después del filtro es equivalente a invertir el filtro; se puede reescribir $y_A = g_A * h^-$, donde $h^-[n] = h[-n]$.
Por lo tanto $h_A = h * h^-$.

(b) Como $h[n]$ es real, la respuesta frecuencial de $h^-[n]$ será el conjugado de H: $H^-(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta})^*$.
Entonces $H_A = H \cdot H^* = |H(e^{j\theta})|^2$.

(c) Con un razonamiento similar a la parte anterior, se tiene que $H_B(e^{j\theta}) = H + H^* = 2 \cdot |H(e^{j\theta})| \cdot \cos \angle(H(e^{j\theta}))$, que es real.

(e) $H(e^{j\theta}) = 2e^{-j\theta/2}\cos(\theta/2)$, entonces $H_{1A}(e^{j\theta}) = 4\cos^2(\theta/2) = 2(1 + \cos\theta)$.

(f) $H_{1B}(e^{j\theta}) = 2\cos(\theta/2)\cos(-\theta/2) = 2(1 + \cos\theta)$.

(g) $H_2(e^{j\theta}) = 1/(1 - \alpha e^{-j\theta})$, entonces queda $H_{2A}(e^{j\theta}) = 1/(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta) = 1/(5/4 - \cos\theta)$.

(h)

$$H_{2B}(e^{j\theta}) = \frac{2 - 2\alpha\cos\theta}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta} = \frac{2 - \cos\theta}{5/4 - \cos\theta}$$