Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de diciembre de 2009

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Enunciar el teorema del muestreo.

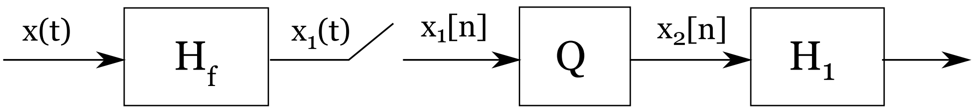
(b) Demostrar.

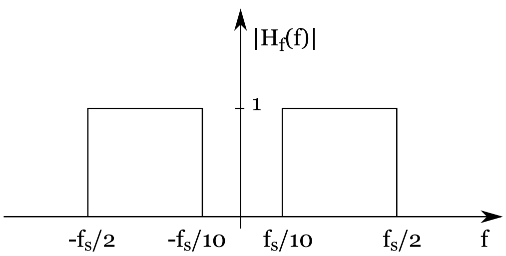
Aplicación: Sea la señal $x_c(t) = \mathrm{sinc}(15\mathrm{Hz} \cdot t)$. La señal $x[n]$ corresponde a muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 10\mathrm{Hz}$.

(c) Hallar $x[n]$, hallar y graficar $X(e^{j\theta})$.

Problema 1

Se tiene un sistema como el que se muestra en la figura, donde se utiliza una frecuencia de muestreo f_s.





Se desea filtrar un proceso $x(t)$ con la siguiente autocorrelación:

$$R_x(\tau) = \frac{T}{2} \sum_k \delta(\tau - kT)$$

con $T = 3T_s$.

(a) Hallar la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso $x_1(t)$. Hallar la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso $x_1[n]$.

El proceso $x_1[n]$ será cuantizado por el cuantizador Q con un paso de cuantización Δ con redondeo, para luego ser filtrado por un filtro H_1. Este filtro tiene solamente dos ceros ubicados en $z_c = \pm 1/2$, no tiene polos y su respuesta en frecuencia es igual a 1 en $\theta = \pi/2$.

(b) Hallar la respuesta al impulso $h_1[n]$ y su respuesta en frecuencia $H_1(e^j\theta)$.

(c) Hallar la relación señal a ruido a la entrada y a la salida del filtro $H_1(z)$. Comparar.

A la salida de este sistema se agrega otro filtro $H_2(z)$ que tiene sólo un polo doble ubicado en $z_p = 2/3$, no tiene ceros y su respuesta frecuencial en continua vale 9.

(d) Dar una expresión de la transferencia del filtro $H(z)$ que equivale a H_1 y H_2 en cascada.

(e) $H(z)$ se va a implementar utilizando únicamente dos elementos de retardo. Dar un diagrama de bloques para $H(z)$.

Problema 2

Se tiene una señal $x_1(t) = \cos(2\pi\, 7350\mathrm{Hz}\, \mathrm{t})$, la cual se muestrea a una frecuencia $f_s = 44100\,\mathrm{Hz}$. La señal muestreada $x_1[n]$ se procesa con un filtro digital causal H definido por la siguiente ecuación de recurrencia, donde la entrada es $x[n]$ y la salida $y[n]$:

$$y[n] + \beta y[n-1] \ = \ x[n] + \alpha x[n-1] + x[n-2]$$

(a) Calcular α y β para que la salida $y_1[n]$ en régimen sea nula, y que la respuesta frecuencial en continua valga 5.

(b) Estudiar la estabilidad del filtro digital determinado en la parte anterior.

(c) Descomponer el filtro digital H como un filtro no recursivo H_1, seguido por un filtro puramente recursivo H_2.

(d) Dar el diagrama de bloques del filtro digital H implementado según la parte anterior.

(e) Calcular la respuesta al impulso del filtro digital H.

Las operaciones se realizan en punto fijo con redondeo, usando 10 bits para la parte fraccionaria.

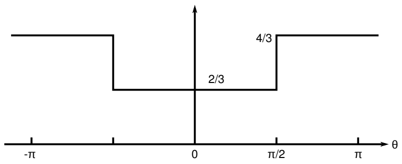
(f) Para la implementación de la parte (d), calcular la potencia, a la salida del filtro, de los errores introducidos en las operaciones.

Solución

Pregunta

(c) $x[n] = \text{sinc}(3n/2)$. El espectro de x_c es $X_c(f) = 1/15 \cdot \Pi(f/15)$, $X(e^{j\theta})$ es la superposición cada 2π de la función $f_s/15 \cdot \Pi(\theta f_s/30\pi) = 2/3\Pi(\theta/3\pi)$:

$$X(e^{j\theta}) = 2/3 \sum_k \Pi((\theta - 2k\pi)/(3\pi))$$



Problema 1

(a) La autocorrelación de $x(t)$ es un tren de deltas por lo que la densidad espectral de potencia será también un tren de deltas:

$$G_x(f) = \frac{T}{2T} \sum_k \delta(f - k/T)$$

Por lo tanto la densidad espectral de potencia luego del filtrado es

$$G_x(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - 1/3T_s) + \delta(f + 1/3T_s))$$

entonces la autocorrelación es

$$R_{x_1}(\tau) = cos(2\pi\tau/(3T_s))$$

Luego, la densidad espectral de potencia de $x[n]$ es

$$G_{x_1}(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{2} \sum_k (\delta(\theta - 2\pi/3 + 2k\pi) + \delta(\theta + 2\pi/3 + 2k\pi)).$$

La autocorrelación de $x[n]$ es entonces

$$R_{x_1}[m] = cos(2\pi m/3)$$

(b) El filtro H_1 tiene la forma

$$H_1(z) = \alpha(z - 1/2)(z + 1/2)$$

Evaluando en $z = j$ se tiene $\alpha(j - 1/2)(j + 1/2) = 1$ y entonces $\alpha = -4/5$.
La respuesta al impulso es $h_1[n] = -4/5(\delta[n + 2] - \delta[n]/4)$.

(c) A la entrada $S_{x_2} = 1$ y la potencia del ruido introducido por el cuantizador de paso Δ es $N_e = \sigma_n^2 = \Delta^2/12$. La relación señal a ruido en la entrada es $SNR_e = \frac{12}{\Delta^2}$.
A la salida, la potencia del ruido es $N_s = \sigma_n^2 \sum_k h_1^2[k] = 0.68\Delta^2/12$.
Para calcular la potencia de señal S_{x_3}, se tiene en un período que

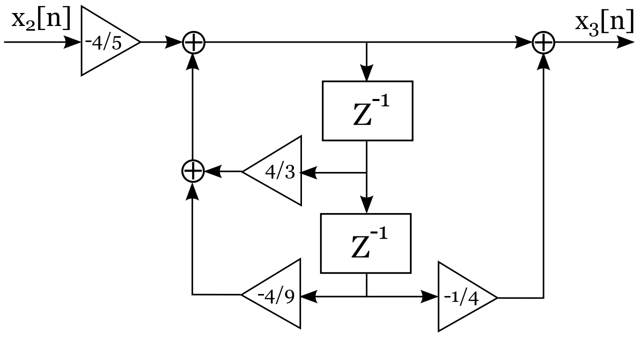
$$G_{x_3}(e^{j\theta}) = |H_1(e^{j\theta})|^2\Big|_{\theta=2\pi/3} \delta(\theta - 2\pi/3) + |H_1(e^{j\theta})|^2\Big|_{\theta=-2\pi/3} \delta(\theta + 2\pi/3).$$

Por lo tanto se tiene que $S_{N_3} = 2 \times 0.84 = 1.68$.
Finalmente $SNR_s \approx 29.6/\Delta^2$, lo cual representa una mejora ya que atenúa más las frecuencias donde no hay señal.

(d)

$$H(z) = -\frac{4}{5}\frac{1-1/4z^{-2}}{(1-4/3z^{-1}+4/9z^{-2})}$$

(e)



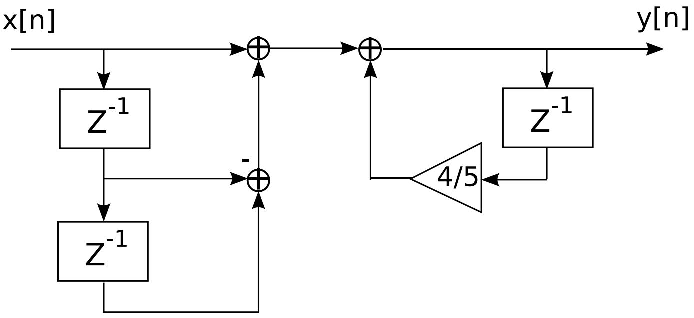
Problema 2

(a) $x_1[n]$ es una sinusoidal a frecuencia $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, por lo cual deben existir un par de ceros sobre el circulo unidad a frecuencias $\pm\theta_1$.
Entonces, el numerador debe ser proporcional a $(z - e^{j\theta_1})(z - e^{-j\theta_1}) = z^2 - 2z\cos(\theta_1) + 1$. Por lo tanto, $\alpha = -2\cos(\theta_1) = -1$.
En continua, la ganancia es 5. Sustituyendo frecuencia 0 en la respuesta frecuencial, se obtiene $\beta = -4/5$.

(b) $|\beta| < 1$, por lo cual el filtro es estable (el polo del filtro está en $z = -\beta$).

(c) Para simplificar el estudio de $h[n]$, considero 2 filtros en cascada: $k[n] - \frac{4}{5}k[n-1] = x[n]$ seguido por $y[n] = k[n] - k[n-1] + k[n-2]$.
El filtro recursivo tiene respuesta $h_1[n] = (4/5)^n u[n]$, y el filtro no recursivo tiene respuesta $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$.

(d)



(e) Haciendo la convolución de los 2 filtros, queda $h[n] = h_1[n] - h_1[n-1] + h_1[n-2] = (4/5)^n\{u[n] - \frac{5}{4}u[n-1] + \frac{25}{16}u[n-2]\}$.

(f) En punto fijo, sólo se introducen errores en los productos por factor no entero. En este filtro, el único producto es el factor 4/5 que se realimenta a la entrada del filtro. Por lo tanto, el modelo de ruido aditivo a la salida del producto equivale a alimentar el filtro completo con ruido blanco y estudiar la salida.
Como el modelo para errores da ruido blanco, aplicamos respuesta de un filtro a un proceso, luego Parseval, y llegamos a lo siguiente: $\sigma^2_{y_e} = \sigma^2_e \sum_n |h[n]|^2$.

$$\sum_n |h[n]|^2 = \sum_n (16/25)^n = \frac{25}{9}$$

Entonces, $\sigma_{y_e}^2 = \frac{25}{9}\sigma_e^2$, con $\sigma_e^2 = \frac{2^{-20}}{12}$.