# Muestreo y procesamiento digital
# Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

10 de julio de 2009

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

## Pregunta

(a) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad de sistemas en tiempo discreto lineales invariantes en el tiempo.

(b) Demostrar únicamente que la condición es necesaria.

## Problema 1

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal tiene la función de transferencia siguiente:

$$H(z) = \frac{1 - 2.3z^{-1} - 1.7z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} - 0.25z^{-2} - 0.2z^{-3}} = \frac{1 - 2.3z^{-1} - 1.7z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}$$

(a) Encuentre una ecuación en diferencias que relacione la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$ para este sistema.

(b) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

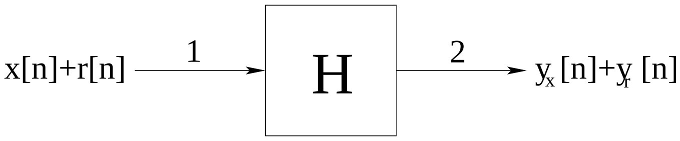
(c) Estudiar la estabilidad del sistema.

(d) El sistema se implementa conectando en paralelo un filtro canónico de segundo orden y un filtro canónico de primer orden. Al filtro de primer orden se le hace corresponder el polo de mayor módulo. Dibujar el diagrama de bloques correspondiente indicando el valor de todos los coeficientes.

(e) Las operaciones se realizan con registros de punto fijo, con $B$ bits de parte fraccionaria, y redondeo. Calcular la potencia a la salida del filtro debido a los errores introducidos en las operaciones.

# Problema 2

Se desea mejorar la relación señal a ruido con que llega una señal. La señal original $x[n]$ viene contaminada con ruido aditivo $r[n]$. Se propone procesar la señal mediante un filtro $H$:




La señal y el ruido se pueden modelar de la siguiente forma:

$$x[n] = \frac{1}{2}(a[n] + a[n-1])$$

$$r[n] = A \cdot (0.7\, b[n] - 0.3\, b[n-1])$$

donde $a[n]$ y $b[n]$ son procesos IID, con valor esperado 0 y potencia 1.

(a) Calcular la relación señal a ruido en el punto 1, en función de $A$. Evaluar para el caso $A = 0.1$.

(b) Si el filtro $H$ es un pasabajos ideal, calcular en función de $A$ y de la frecuencia de corte $\theta_c$, la SNR en el punto 2. Evaluar para el caso $A = 0.1$, y $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$.

(c) Calcular la respuesta al impulso del pasabajos con $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$.

(d) Comente detalladamente cómo obtener una buena aproximación realizable para este filtro ideal. Comentar sobre ventajas y desventajas del método elegido con respecto a otros métodos. Comentar sobre criterios para elegir el orden del filtro resultante, y en caso que corresponda, la elección de ventanas.

(e) Si el filtro $H$ es un filtro transversal de respuesta impulsiva $\delta[n] + \alpha\delta[n-1]$, calcular, para $A = 0,1$, el parámetro $\alpha$ que minimice el error cuadrático medio entre la señal de entrada y salida:

$$\varepsilon^2 = \mathbb{E}\{(y[n] - x[n])^2\}$$

*Nota:* recordar que la salida $y[n]$ incluye componentes de señal y de ruido.

# Solución

## Pregunta

**(a)** La condición necesaria y suficiente para que un filtro digital con respuesta al impulso $h[n]$ sea estable, es que la norma 1 de la respuesta sea acotada: $\sum_n |h[n]| < \infty$.

**(b)** Hay que demostrar que si no se cumple la condición, el filtro no es estable. O lo que es lo mismo, que si el filtro es estable, entonces vale la condición. Esto último se demuestra fácilmente: sea un filtro estable. Elijo como entrada $x[n] = \text{sg}(h[-n])$ o 0 si $h[-n] = 0$. Entonces, $y[0] = \sum_n h[n]\text{sg}(h[+n]) = \sum_n |h[n]|$.
Como el filtro es estable por hipótesis, $y[0]$ debe ser finito, y por lo tanto vale la condición.

## Problema 1

**(a)** Como $Y(z) = H(z)X(z)$, y antitransformando:

$$y[n] + 0.8y[n-1] - 0.25y[n-2] - 0.2y[n-3] = x[n] - 2.3x[n-1] - 1.7x[n-2]$$

**(b)** El sistema tiene 3 polos simples en $z = 0.5$, $z = -0.5$ y $z = -0.8$. Entonces la transferencia se puede expresar en fracciones simples. Igualando coeficientes, resulta:

$$H(z) = \frac{-2}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} + \frac{2}{1 + 0.8z^{-1}}$$

Y la respuesta impulsiva se calcula directamente:

$$h[n] = u[n]\big(-2(0.5)^n + (-0.5)^n + 2(-0.8)^n\big)$$

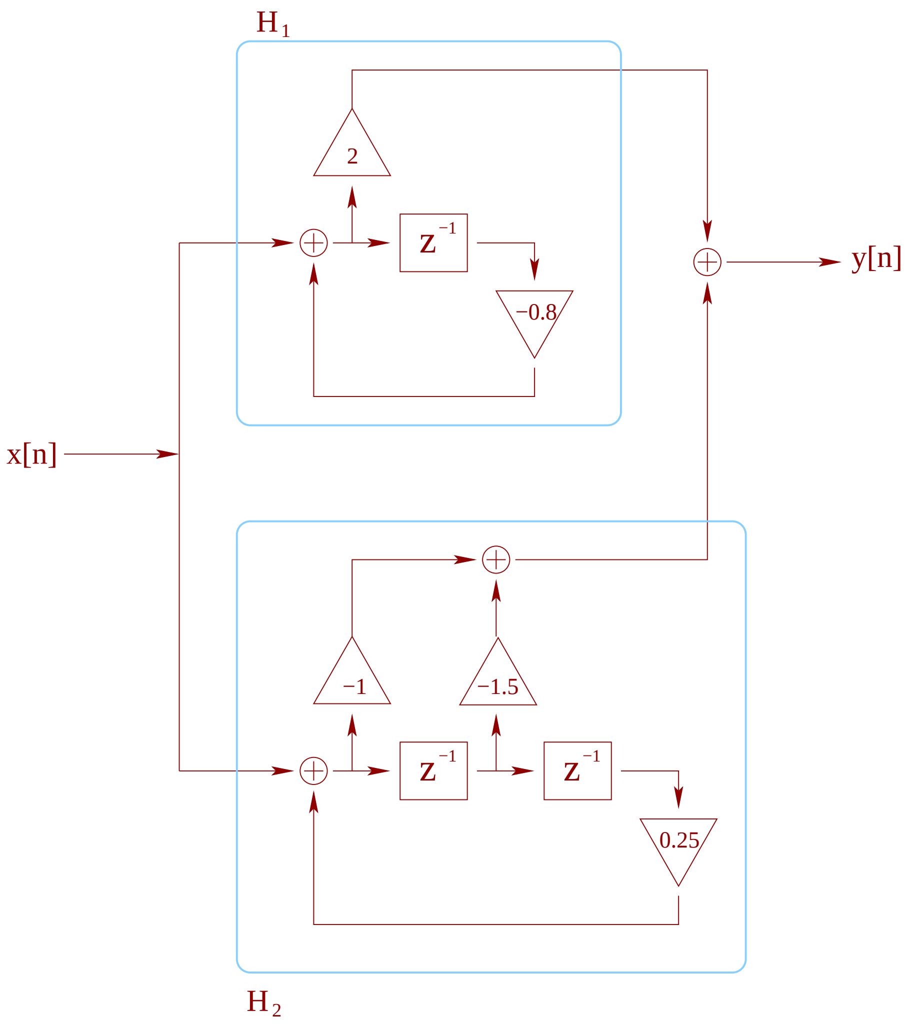
**(c)** Los tres polos se encuentran dentro del círculo unidad, y el sistema es causal, por lo tanto la región de convergencia incluye al círculo unidad. Por lo tanto el sistema es estable.

**(d)** Descomponemos el filtro en dos,

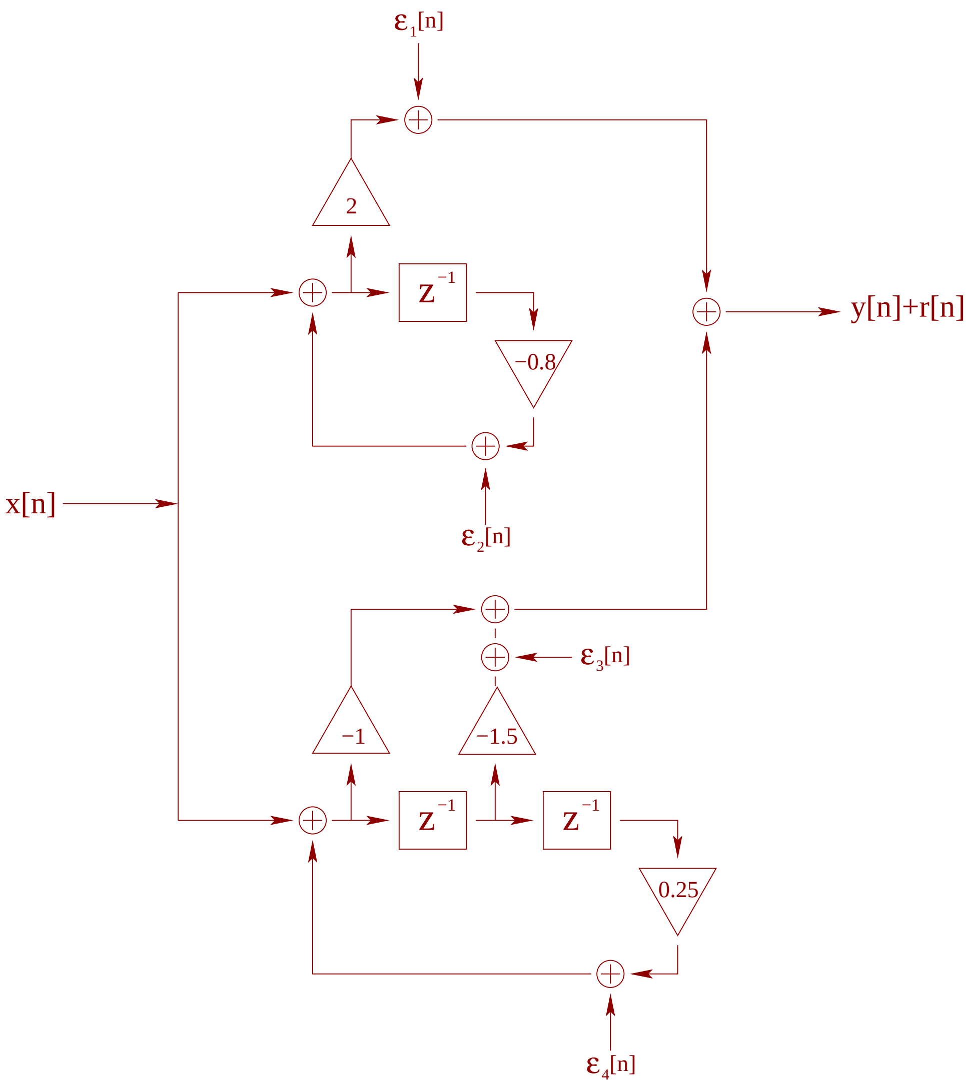
$$H_1(z) = \frac{2}{1 + 0.8z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{-2}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{-1 - 1.5z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

y los ponemos en paralelo. El sistema que obtenemos es:




**(e)** Al aplicar el modelo de ruido de punto fijo obtenemos el siguiente sistema:




Los $\epsilon_i[n]$ son procesos estocásticos blancos, de media nula y potencia $\sigma^2 = 2^{-2B}/12$. Ademas, son independientes entre sí y de las otras señales del sistema. La multiplicación por $-1$ no introduce errores pues es simplemente cambiar de signo. (La multiplicación por 2 también se podría hacer sin errores pues al usar notación binaria es simplemente hacer un corrimiento de cifras de una posición.)

Llamaremos $r[n]$ a la salida debida a errores. Entonces, el ruido es:

$$r[n] = \epsilon_1[n] + \epsilon_2[n] * h_1[n] + \epsilon_3[n] + \epsilon_4[n] * h_2[n]$$

Como los ruidos son independientes y de media nula (pues se usa redondeo), podemos estudiar la potencia de cada uno en forma independiente y luego sumarlas.

$$\sigma_r^2 = \sigma^2 + \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1^2[k] + \sigma^2 + \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_2^2[k]$$

De lo encontrado antes,

$$h_1[n] = u[n]2(0.8)^n$$

$$h_2[n] = u[n]\big(-2(0.5)^n + (-0.5)^n\big) = \begin{cases} -(0.5)^n & n \geq 0 \text{ par} \\ -3(0.5)^n & n \geq 0 \text{ impar} \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Usando la fórmula de suma de la serie geométrica obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1^2[k] = \frac{4}{1-(0.8)^2}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[2k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[2k+1]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[k] = \sum_{k=0}^{\infty}(0.25)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 9(0.25)^{2k+1} = \frac{3.25}{1-0.0625}$$

Como $\sigma^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$, el resultado final es

$$\sigma_r^2 = \frac{2^{-2B}}{12}\left(2 + \frac{4}{1-(0.8)^2} + \frac{3.25}{1-0.0625}\right)$$

# Problema 2

**(a)** $x[n]$ se modela como un proceso blanco a través de un filtro $H_x(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1})$. Por lo tanto, $G_x(e^{j\theta}) = 1 \cdot |H_x(e^{j\theta})|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$, y aplicando Parseval, la potencia de señal será $0,5$. Igualmente para el ruido, el filtro en cuestión es $H_r(z) = A(0.7 - 0.3z^{-1})$. Se llega a $G_r(e^{j\theta}) = 1 \cdot |H_r(e^{j\theta})|^2 = A^2(0,58 - 0,42\cos\theta)$. La potencia de ruido será entonces $0,58\,A^2$.
La $SNR_1$ será $\frac{0,5}{0,58\,A^2}$. Para $A = 0,1$ vale $SNR_1 = 86,2 = 19,4$dB.

**(b)** En este caso, para averiguar las potencias, habrá que integrar las densidades espectrales entre $\theta = 0$ y $\theta_c$, la frecuencia de corte. Esto da:

$$SNR_2 = \frac{0,5(\theta_c + \sin\theta_c)}{A^2(0,58\theta_c - 0,42\sin\theta_c)}$$

En el caso particular, vale $SNR_2 = 173,9 = 22,4$dB.

**(c)** De la tabla de transformadas, la respuesta impulsiva será $h[n] = \frac{\theta_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{\theta_c n}{\pi})$. Para $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$, queda $h[n] = \frac{2}{3}\mathrm{sinc}\frac{2n}{3}$

**(d)** Ver teórico. Una posibilidad para obtener un filtro de bajo orden y sin oscilaciones de Gibbs ni fluctuaciones en la banda de paso puede ser un filtro de Chebyshev mediante el método de transformación bilineal. De esta forma se obtiene una buena pendiente en la frecuencia de corte, y las fluctuaciones se dejan en la banda de corte únicamente. Como para esta aplicación no es muy crítico el orden del filtro, un orden bajo alrededor de 4 o 6 estaría bien.
Otras respuestas posibles: diseñar un filtro transversal mediante traslación y ventanas. Hay que mencionar el retardo introducido y las ventajas de la ventana elegida. El orden tiene que ser suficiente como para no introducir oscilaciones de Gibbs importantes en la respuesta frecuencial, y tener una pendiente razonable en la frecuencia de corte.

**(e)**

$$y[n] - x[n] = \alpha x[n-1] + r[n] + \alpha r[n-1]$$
$$= \alpha(a[n-1]/2 + a[n-2]/2) + 0,7Ab[n] - 0,3Ab[n-1] + \alpha A(0,7b[n-1] - 0,3b[n-2])$$
$$= \alpha(a[n-1]/2 + a[n-2]/2) + 0,7Ab[n] + A(0,7\alpha - 0,3)b[n-1] - 0,3\alpha Ab[n-2]$$
$$\mathbb{E}\{(y[n]-x[n])^2\} = \alpha^2/2 + 0,7^2A^2 + (0,7\alpha - 0,3)^2A^2 + 0,3^2A^2\alpha^2$$

Derivando con respecto a $\alpha$, queda:

$$d\mathbb{E}/d\alpha = \alpha(1 + 1,16A^2) - 0,42A^2$$

Sustituyendo el valor de $A$ e igualando a 0 para hallar el mínimo:

$$\alpha = \frac{0,42}{100 + 1,16} = 0,004$$