Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de febrero de 2009

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

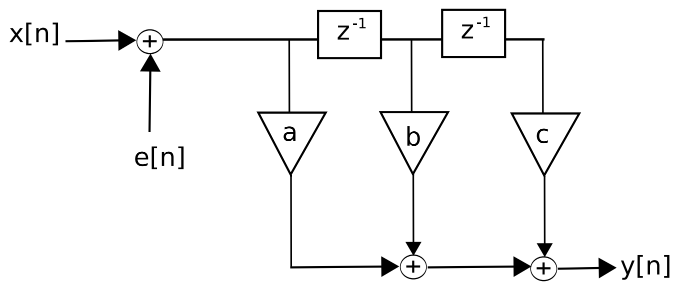
(a) Enunciar el teorema del muestreo.

(b) Demostrar el teorema del muestreo.

(c) Sea $x_c(t) = \cos(2900 \cdot 2\pi t) + 3\cos(12100 \cdot 2\pi t)$ una señal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 6000\,\text{Hz}$. $y_c(t)$ es la reconstrucción ideal de $x[n]$. Hallar $y_c(t)$.

Problema 1

(a) Se considera el filtro digital real de la siguiente figura con coeficientes a, b y c no nulos. Hallar condiciones en los parámetros del filtro para que éste **no** presente distorsión de fase. Para este caso, hallar la respuesta en frecuencia del mismo. Observar que el retardo de grupo del filtro es de una muestra.



(b) Al filtro de la parte (a) se aplicará la señal $x[n]$, que llega contaminada con ruido blanco aditivo de potencia σ_N^2, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El objetivo del filtro es recuperar la señal.

Hallar los coeficientes teniendo en cuenta las dos condiciones siguientes:

i. Las condiciones halladas en la parte (a).

ii. La respuesta en frecuencia cero es 1.

iii. Que la salida sea lo más similar posible a la señal original $x[n]$, tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido. Es decir, teniendo en cuenta la observación hecha sobre el retardo de grupo, se deberá minimizar:

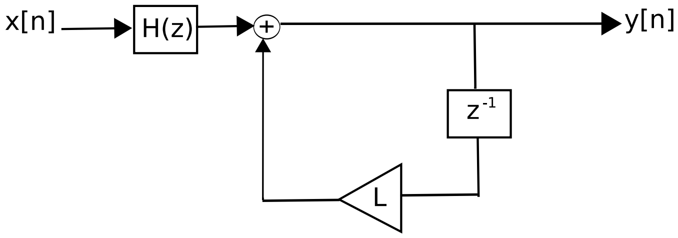
$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\big\{(y[n] - x[n-1])^2\big\}$$

Datos: El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \left(\delta[n] + \frac{\delta[n-1] + \delta[n+1]}{2} \right) \qquad\qquad \sigma_x^2 = \sigma_N^2$$

(c) Dar el modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto fijo* y se utiliza *redondeo.* Justificar.

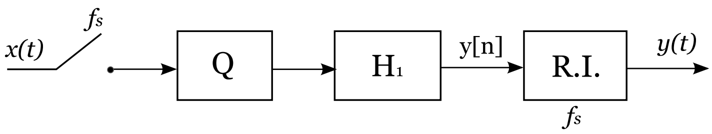
(d) Se considera el filtro de la siguiente figura donde $H(z)$ corresponde a la transferencia del filtro de la parte (a).



Calcular la potencia de "ruido de operaciones" a la salida del segundo filtro, para una representación con punto fijo y redondeo, con coeficientes genéricos. Se debe fundamentar correctamente todos los pasos.

Problema 2

El sistema de la figura implementa un derivador en tiempo continuo, procesando internamente la señal en tiempo discreto. El filtro H_1 es un derivador ideal de respuesta en frecuencia, $H_1(e^{j\theta}) = jf_s\theta$ con $\theta \in [-\pi, \pi)$. El proceso en tiempo continuo $x(t)$ es muestreado a frecuencia f_s utilizando una cuantificación de 8 bits. El proceso $x(t)$ ya es de banda limitada a 16 kHz y toma valores en el intervalo $(-1, 1)$.



(a) Hallar la frecuencia de muestreo mínima para la cual el sistema se comporta como un derivador.

(b) Dar un modelo lineal para los errores debidos a la cuantización, detallando bajo qué hipótesis es válido dicho modelo.

(c) Hallar la potencia del ruido de cuantización a la salida del filtro derivador, utilizando la frecuencia de muestreo hallada en la parte (a).

Ahora se busca sustituir el bloque derivador ideal del sistema anterior por una implementación real. Se utilizará la siguiente,

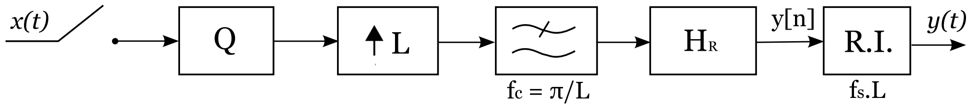
$$y[n] = f_s\,(x[n] - x[n-1])$$

(d) Hallar la respuesta frecuencial del filtro propuesto. Graficar módulo y fase por lo menos en el intervalo $[-1.5\pi, 1.5\pi]$.

Se considerará que el filtro es una buena aproximación de un derivador para aquellas frecuencias tales que $\left(|H_1(e^{j\theta})| - |H_R(e^{j\theta})|\right)/|H_1(e^{j\theta})| \leq 0.1$.

(e) Determinar el rango de frecuencias angulares para el cual el filtro H_R aproxima satisfactoriamente al filtro ideal H_1.

El muestreador tiene frecuencia de muestreo igual a la hallada en la parte (a) y es fija. Para utilizar el sistema derivador propuesto se propone realizar sobremuestreo y submuestreo como se muestra en la figura.



(f) Determinar el menor valor de L para que el sistema se comporte como un derivador.

(g) Bosquejar el espectro de la señal luego de cada bloque del sistema. Suponer que $G_x(f) = \Lambda\left(\frac{f}{12000}\right)$.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) A partir de los resultados intermedios del teorema del muestreo, se ve que los componentes que quedan entre $\pm f_s/2$ son: $\pm 2900\,\mathrm{Hz}$ y $\pm(12100\,\mathrm{Hz} - 2 \cdot f_s) = \pm 100\,\mathrm{Hz}$. Por lo tanto la salida será $y_c(t) = 3\cos(100 \cdot 2\pi t) + \cos(2900 \cdot 2\pi t)$.

Problema 1

(a) Para que el filtro no presente distorción de fase, la respuesta en frecuencia del mismo debe ser de fase lineal. En este caso se tiene que la respuesta en frecuencias del filtro está dada por

$$H(e^{j\theta}) = a + be^{-j\theta} + ce^{-j2\theta}$$

Recordar que para que un filtro FIR sea de fase generalizada, es necesario que la respuesta al impulso sea simétrica respecto de su punto medio. Esto implica que $a = c$. Por lo tanto la respuesta en frecuencias queda

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}(b + 2a\cos\theta)$$

Para que la fase sea lineal $b + 2a\cos\theta$ no debe cambiar de signo.

(b) Imponiendo la segunda condición tenemos que

$$b + 2a = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a$$

La salida esta dada por

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n-2] + an[n] + bn[n-1] + cn[n-2]$$

donde n es el ruido aditivo.
Utilizando la relacion entre a y b hallada tenemos que

$$y[n] - x[n-1] = s_x[n] + s_n[n]$$

donde

$$s_x[n] = a(x[n] - 2x[n-1] + x[n-2])$$

$$s_n[n] = a(n[n] - 2n[n-1] + n[n-2]) + n[n-1]$$

Observar que, como $x[n]$ y $n[n]$ son independientes, también lo serán $s_x[n]$ y $s_n[n]$. Por lo tanto

$$\epsilon^2 = E\{(s_x[n] + s_n[n])^2\} = E\{s_x[n]^2\} + E\{s_n[n]^2\}$$

Luego realizando las cuentas correspondientes

$$\epsilon^2 = 6a^2\sigma_x^2 - 4a^2 R_x[1] + (6a^2 - 4a^2 + 1)\sigma_x^2$$

Por lo tanto utilizando que $R_x[1] = \sigma_x^2/2$ y operando se tiene

$$\epsilon^2 = \sigma_x^2(8a^2 - 4a + 1)$$

Para obtener el mínimo igualamos la derivada de $\epsilon(a)$ respecto de a a cero. Es claro que este punto corresponde a un mínimo de dicha función. Realizando dichos cálculos se llega a que $a = 1/4$, lo que implica que $b = 1/2$. Observar que esto garantiza que el sistema no distorsiona la fase ya que $b > 2a$.

(c) Ver teórico.

(d) Debido a los errores en las operaciones en punto fijo aparecen 4 ruidos, uno por cada multiplicador.
Los ruidos debidos a los multiplicadores del filtro H pueden pensarse como aplicados a la salida de H. Por otro lado el ruido debido al multiplicador restante puede pensarse aplicado a la entrada de la última etapa del filtro, es decir en el mismo punto que los anteriores. De lo anterior se deduce que el ruido a la salida, y_e, será la salida que se obtiene al pasar la suma de los cuatro ruidos por la última etapa de filtrado. Por lo que se tiene que

$$E\{y_e[n]^2\} = \sum_{i=1}^{4} E\{y_e[n]^2\} = 4\sigma_{yei}$$

donde σ_{yei} es la potencia de la señales y_{ei}. Notar que estas coinciden para todo i.
La transferencia de la etapa final está dada por

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - Lz^{-1}}$$

Por lo que la respuesta al impulso viene dada por

$$h_2[n] = L^{-n}u[n]$$

de donde la potencia a la salida debida a cada ruido es

$$\sigma_{yei}^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2[n]^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - L}$$

La potencia total del ruido debido a las operaciones es

$$\sigma_{ye}^2 = \frac{4\sigma_e^2}{1 - L}$$

Problema 2

(a) El sistema se comportará como un derivador siempre que se trabaje bajo las hipótesis del teorema de muestreo. Es decir que $16kHz \leq f_s/2$, por lo que la mínima frecuencia de muestreo será $f_s = 32KHz$.

(b) Ver teórico.

(c) Los errores debidos a la cuantificación se modelan como una fuente de ruido aditivo blanco con distribución uniforme en el intervalo $[-\Delta/2, \Delta/2]$ con $\Delta = 2^{-7}$. Por lo tanto su densidad espectral de potencia es constante y vale $\sigma^2 = \Delta^2/12$. Llamemeos $y_e[n]$ a la secuencia que se obtiene a la salida del filtro derivador. Su densidad espectral de potencia será,

$$G_{yr}(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_e(e^{j\theta}) = \sigma^2\theta^2$$

Por lo tanto la potencia está dada por,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma^2\theta^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\sigma^2\pi^2}{3}$$

(d) Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación en diferencias que describe la relación entrada salida en el sistema se tiene,

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{f_s}{2}X(e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta}) = j2f_s e^{\frac{j\theta}{2}} \sin\theta/2 X(e^{j\theta})$$

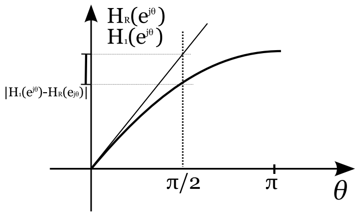
Por lo que la respuesta en frecuencias resulta,

$$H(e^{j\theta}) = j2f_s e^{\frac{j\theta}{2}} \sin\theta/2$$

(e) Sustituyendo los filtros hallados tenemos,

$$0.1 \geq \frac{f_s\theta - 2f_s \sin\theta/2}{f_s\theta} = \frac{\theta - 2\sin\theta/2}{\theta}$$

Puede verse que el rango de valores es independiente del valor de la frecuencia de muestreo utilizada. Evaluando para diferentes valores de θ se obtiene: $|\theta| \leq \theta_m \approx 1.57$.



(f) La señal tiene componentes hasta los 16 kHz, por lo que luego del muestreo (utilizando la frecuencia hallada en la parte (a)) el rango de frecuencias entre cero y 16 kHz se corresponden con el intervalo cero π.
El cambio de la frecuencia de muestreo debe llevar π a una frecuencia angular menor o igual a θ_m. Es decir que $\pi/L \leq \theta_m$. Esto se da para $L = 2$.

(g)