Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de diciembre de 2008

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Explicar brevemente en qué consiste decimar (submuestrear) e interpolar (sobremuestrear) una señal discreta. Dibujar un ejemplo para cada caso.

(b) Dar el diagrama de bloques de un decimador de orden M, indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Hallar la expresión del espectro resultante.

(c) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada con $X(e^{j\theta}) = \Lambda(\theta/\frac{2\pi}{3})$ y M = 3.

(d) Dar el diagrama de bloques de un interpolador de orden L, indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Hallar la expresión del espectro resultante.

(e) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada con $X(e^{j\theta}) = \Lambda(\theta/\frac{2\pi}{3})$ y L = 3.

Problema 1

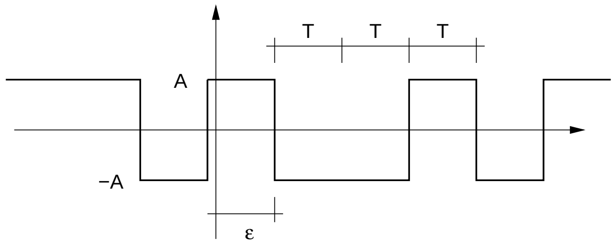
Sea el proceso de tiempo discreto $x[n]$, una secuencia IID que toma los valores 1 y -1 con probabilidad 1/2.

(a) Dar la definición de estacionariedad en sentido amplio y demostrar que $x[n]$ cumple dicha definición.

Sea el proceso de tiempo continuo $x(t)$ constante a tramos, donde

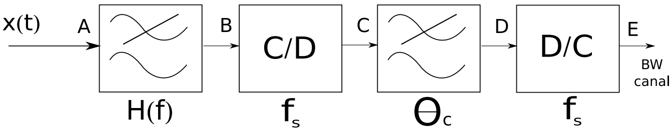
$$x(t) = A\,x[n] \text{ para } t \in [n\,T_b + \epsilon, (n+1)\,T_b + \epsilon) \qquad \text{y el retardo } \epsilon \sim \mathrm{U}[0, T_b].$$

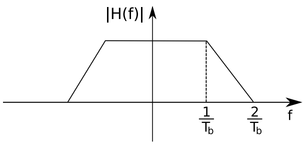
El proceso $x(t)$ se llama *onda binaria aleatoria*, y es de suma utilidad para modelar señales en telecomunicaciones y electrónica. T_b se conoce como *tiempo de bit*, y es el tiempo entre (posibles) transiciones. El retardo ϵ refleja la independencia entre el observador y el reloj a partir del cual se genera la señal. En el dibujo, $x[n]$ vale 1 para $n = -4, -3, -1, 2, 4$, y vale -1 para $n = -2, 0, 1, 3$.



(b) Hallar la media del proceso $x(t)$.

Se desea transmitir una OBA $x(t)$, con tiempo de bit T_b, por un canal de ancho de banda $BW = B_T$, por lo que es necesario eliminar las componentes mayores a dicha frecuencia. Para ello se cuenta con el siguiente sistema que consiste en: un filtro pasabajos no ideal de tiempo continuo, cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura; un muestreador; un filtro pasabajos ideal de tiempo discreto, con frecuencia de corte a determinar; y un reconstructor ideal.





(c) Indicar la mínima frecuencia de muestreo f_s para que el sistema propuesto funcione correctamente. Hallar la frecuencia de corte θ_c correspondiente.

(d) La autocorrelación de la OBA vale $R_x(\tau) = \mathbb{E}\{x(t)x(t+\tau)\} = 1 - \tau/T_b$ para $0 \leq \tau \leq T$. Hallar $R_x(\tau)$ para $\tau \geq T$. Hallar $R_x(\tau)$ para todo $\tau < 0$.

(e) Hallar la densidad espectral de potencia de $x(t)$.

(f) Hallar la relación entre T_b y B_T para que la potencia de $x_D[n]$ (punto D en la figura) sea al menos la potencia de $x_C[n]$ (punto C en la figura) comprendida hasta el primer cruce por cero de su DEP. Plantear la expresión de la potencia de $x_D[n]$.

(g) Bosquejar el espectro en los puntos A, B, C, D y E indicados en el dibujo.

Problema 2

Se considera un sistema formado por un muestreador que trabaja a frecuencia $f_s = 90\text{kHz}$, seguido por un filtro digital dado por la siguiente ecuación de recurrencia, donde la entrada es $x[n]$ y la salida $y[n]$:

$$y[n] + \beta y[n-1] = x[n] + \alpha x[n-1] + x[n-2] \tag{1}$$

(a) Calcular α y β para que cuando se ingresa al sistema con la señal $x_1(t) = cos(2\pi 15000t)$, la salida en régimen sea nula, y que la transferencia en continua valga 5.

(b) Estudiar la estabilidad del filtro digital determinado en la parte anterior.

(c) Calcular la respuesta al impulso del filtro digital. Sugerencia: descomponer el filtro como un filtro recursivo, seguido por un filtro no recursivo.

(d) Dar el diagrama de bloques del filtro digital utilizando únicamente 2 elementos de retardo.

(e) Para la implementación de la parte anterior, las operaciones se realizan en punto fijo con redondeo, con 10 bits para la parte fraccionaria. Calcular la potencia, a la salida del filtro, de los errores introducidos en las operaciones.

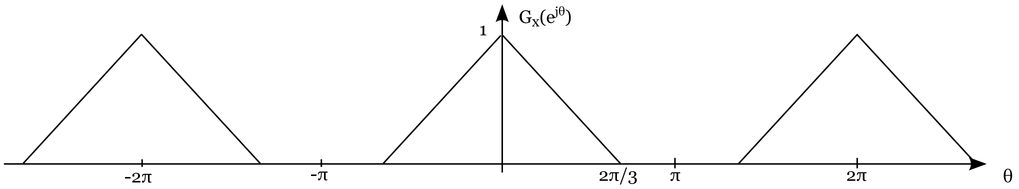
Solución

Pregunta

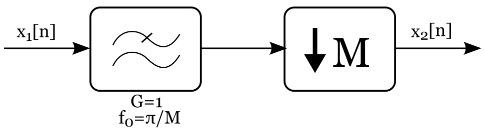
(a) Decimar (por un factor entero): Consiste en quedarse una de cada M muestras de la señal previamente limitada en banda a π/M, lo que resulta en una menor frecuencia de muestreo. Sobremuestrear: Se interpolan valores intermedios de la secuencia muestreada de manera de aumentar la frecuencia de muestreo.

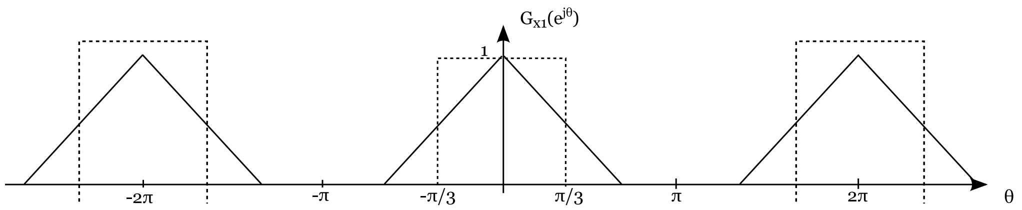
(b) El decimador consiste en un filtro pasabajos de ganancia unitaria y frecuencia de corte π/M, seguido de un compresor de factor M.
$X_M(e^{j\theta}) = X(e^{j\frac{\theta}{M}})$ para $-\pi < \theta < \pi$, y periodizado cada 2π.

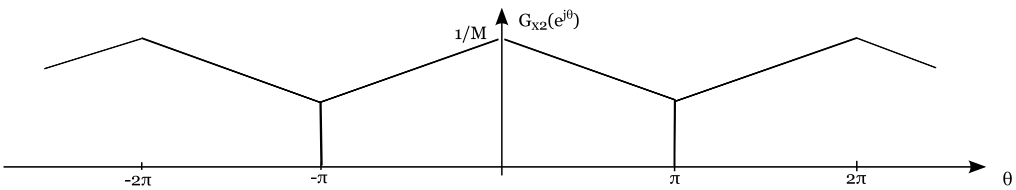
(c) La densidad espectral de potencia de x es:



Y las gráficas de las densidades espectrales de x_1 y x_2 indicados en el diagrama de bloques son:

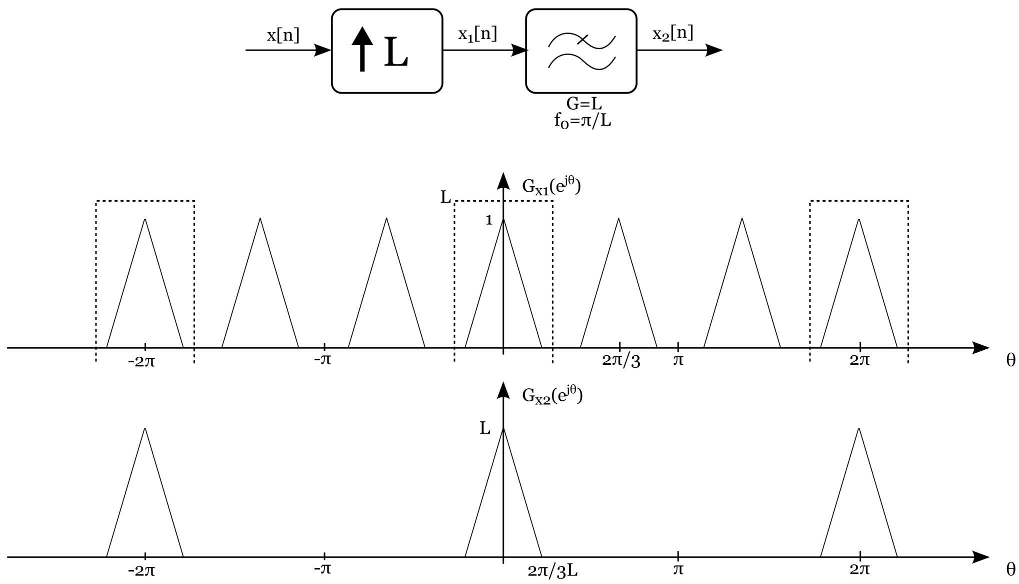






(d) El interpolador consiste en un expansor de factor L seguido de un filtro pasabajos de ganancia L y frecuencia de corte π/L.
$X_L(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta L})$ para $-\pi/L < \theta < \pi/L$ y 0 hasta frecuencia $\pm\pi$, todo periodizado cada 2π.

(e) Las gráficas de las densidades espectrales de x_1 y x_2 indicados en el diagrama de bloques son:



Problema 1

(a) Un proceso, para ser estacionario en sentido amplio, debe cumplir estas dos condiciones:

$$m_x = \mathbb{E}\{x(t)\} = K \text{ con } K \text{ constante}$$

$$R_x(t,s) = \mathbb{E}\{x(t)x(s)\} = R_x(t-s)$$

$$m_x = \mathbb{E}\{x[n]\} = 0$$

$$R_x[n,m] = \mathbb{E}\{x[n]x[m]\} = \delta[n-m]$$

Por lo tanto $x[n]$ es estacionario en sentido amplio.

(b) $m_{x_b} = \mathbb{E}\{x(t)\} = \mathbb{E}\{A\,x[n]\} = A\,\mathbb{E}\{x[n]\} = 0$

(c) Si permitimos el máximo solapamiento posible, obtenemos la mínima frecuencia de muestreo $f_s = \frac{3}{T_b}$, siendo la frecuencia de corte correspondiente $\theta_c = \frac{2\pi}{3}$

(d) Aquí sabemos que t y $t+\tau$ están separados al menos por un tiempo de bit, y por lo tanto siempre existirá un instante de transición entre estos dos tiempos, y los valores de x corresponderán a valores distintos de n para $x[n]$. Como $x[n]$ es una secuencia IID, entonces la esperanza será sobre el producto de valores independientes. Por lo tanto, $R_x(\tau) = \mathbb{E}\{x(t)\}\mathbb{E}\{x(t+\tau)\} = \mathbb{E}\{x[n]\}^2 = 0$.

(e) $G_x(f) = \mathbb{F}\{R_x(\tau)\} = T_b\,sinc^2(f\,T_b)$

(f) Se debe cumplir $B_T \geq \frac{1}{T_b}$. La potencia queda:

$$\int_{-B_T}^{B_T} G_x(f)\,df = \int_{-B_T}^{B_T} T_b\,sinc^2(f\,T_b)\,df$$

(g)

Problema 2

(a) $x_1[n]$ es una sinusoidal a frecuencia $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, por lo cual deben existir un par de ceros sobre el circulo unidad a frecuencias $\pm\theta_1$.
Entonces, el numerador debe ser proporcional a $(z - e^{j\theta_1})(z - e^{-j\theta_1}) = z^2 - 2z\cos(\theta_1) + 1$. Por lo tanto, $\alpha = -2\cos(\theta_1) = -1$.
En continua, la ganancia es 5. Sustituyendo frecuencia 0 en la respuesta frecuencial, se obtiene $\beta = -4/5$.

(b) $|\beta| < 1$, por lo cual el filtro es estable (el polo del filtro está en $z = -\beta$).

(c) Para simplificar el estudio de $h[n]$, considero 2 filtros en cascada: $k[n] - \frac{4}{5}k[n-1] = x[n]$ seguido por $y[n] = k[n] - k[n-1] + k[n-2]$.
El filtro recursivo tiene respuesta $h_1[n] = (4/5)^n u[n]$, y el filtro no recursivo tiene respuesta $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$.
Haciendo la convolución de estos 2 filtros, queda $h[n] = h_1[n] - h_1[n-1] + h_1[n-2] = (4/5)^n\{u[n] - \frac{5}{4}u[n-1] + \frac{25}{16}u[n-2]\}$.

(d) Forma canónica: teórico.

(e) En punto fijo, sólo se introducen errores en los productos por factor no entero. En este filtro, el único producto es el factor 4/5 que se realimenta a la entrada del filtro. Por lo tanto, el modelo de ruido aditivo a la salida del producto equivale a alimentar el filtro completo con ruido blanco y estudiar la salida.
Como el modelo para errores da ruido blanco, aplicamos respuesta de un filtro a un proceso, luego Parseval, y llegamos a lo siguiente: $\sigma_{y_e}^2 = \sigma_e^2 \sum_n |h[n]|^2$.

$$\sum_n |h[n]|^2 = (16/25)^2 \left(u[n] - \frac{5}{4}u[n-1] + \frac{25}{16}u[n-2]\right)^2$$

$$= 1 + 1/25 + (21/16)^2 \sum_{n=2}^{\infty} (16/25)^n$$

$$= (25 + 1 + 49)/25 = 3$$

Entonces, $\sigma_{y_e}^2 = 3\sigma_e^2$, con $\sigma_e^2 = \frac{2^{-20}}{12}$.