Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

23 de julio de 2008

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

Enunciar y demostrar el teorema del muestreo.

Problema 1

La señal $x[n]$ se puede modelar como un proceso estacionario con autocorrelación

$$R_x[m] = \delta[n] + \alpha\delta[m-1] + \alpha\delta[m+1].$$

(a) Calcular G_x, m_x y σ_x^2, densidad espectral de potencia, media y potencia de x respectivamente. Justificar todos los resultados. Bosquejar la autocorrelación y densidad espectral de x.

(b) A partir de lo anterior, determinar el rango de valores posibles de α.

Un proceso con las mismas propiedades de $x[n]$ se puede generar filtrando un proceso $a[n]$, donde $a[n]$ es IID, gaussiano de media nula y potencia 1, y el filtro (H_1) es un FIR causal de primer orden.

(c) Calcular todos los parámetros de este filtro para obtener el proceso x definido anteriormente.

(d) Verificar que existe solución de la parte anterior para el rango de α calculado anteriormente.

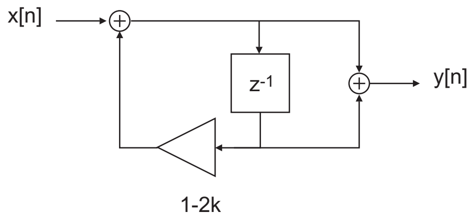
Se quiere ecualizar x para obtener una señal de densidad espectral constante, manteniendo su potencia. Esto se hace filtrando $x[n]$ mediante un filtro $H_e(z)$, obteniéndose como salida el proceso $y[n]$.

(e) ¿Qué propiedades debe cumplir la respuesta frecuencial de H_e?

(f) Diseñar el filtro H_e que ecualice la señal $x[n]$. Verificar que cumple la condición pedida en la parte anterior.

Problema 2

Se considera el siguiente filtro digital H:



(a) Hallar la transferencia del filtro.

(b) Hallar el rango de variación del parámetro k para que el filtro sea estable.

Se considera de aquí en más $k = 1/10$.

(c) Expresar y graficar la respuesta frecuencial de H.

Sea $x(t)$ un proceso de tiempo continuo con autocorrelación

$$R_x(\tau) = 3f_o^2 sinc(f_o t) * sinc(3f_o t).$$

Se quiere procesar $x(t)$ con el filtro propuesto. Para esto se debe muestrear y cuantizar $x(t)$ previo al procesamiento.

(d) Calcular en función de f_0 la mínima frecuencia de muestreo para que el sistema funcione adecuadamente.

(e) Hallar la densidad espectral de potencia de $x[n]$.

Se asume que $x[n]$ está acotada entre -1 y 1 y el cuantizador es uniforme, de paso Δ.

(f) Explicar el modelo de ruido de cuantización utilizado indicando las hipótesis de validez.

(g) Dar la potencia del ruido de cuantización antes y después del filtro H en función de Δ.

Solución

Problema 1

(a) $R_x[m] = 0$ para valores grandes de m, por lo tanto $m_x = 0$. $\sigma_x^2 = R_x[0] = 1$. $G_x(e^{j\theta}) = 1 + 2\alpha \cos\theta$.
R_x toma valores α, 1, α centrados en 0. G_x es un coseno elevado, y vale $1 + 2\alpha$ en $\theta = 0$, y $1 - 2\alpha$ en $\theta = \pi$.

(b) Por una parte, $|\alpha|$ no puede ser superior a 1, que es la potencia de x. Esta es una propiedad de las funciones de autocorrelación.
Además, la densidad espectral tiene que ser no negativa. Esto significa que los valores extremos de G_x deben ser no negativos: $1 + 2\alpha \geq 0$, y $1 - 2\alpha \geq 0$.
Debe ser entonces $|\alpha| \leq 1/2$.

(c) Un FIR genérico de orden 1 será de la forma $x[n] = \beta a[n] + \gamma a[n-1]$. Calculando la autocorrelación a la salida del filtro, $R_x[n] = (\beta^2 + \gamma^2)R_a[m] + \beta\gamma R_a[m-1] + \beta\gamma R_a[m+1]$.
El proceso a tiene autocorrelación $R_a[m] = \delta[m]$. Por lo tanto será $R_x[m] = (\beta^2 + \gamma^2)\delta[m] + \beta\gamma\delta[m-1] + \beta\gamma\delta[m+1]$.
Igualando términos con la autocorrelación especificada originalmente, resulta: $\beta^2 + \gamma^2 = 1$ y $\beta\gamma = \alpha$.
Resolviendo la cuadrática $\beta^4 - \beta^2 + \alpha^2 = 0$ se obtienen los valores de β^2.

(d) El discriminante de la cuadrática vale $1 - 4\alpha^2$, que justamente es positivo para el rango calculado de α.

(e) La densidad espectral de y será entonces constante, y de altura 1 (la potencia total es $1/2\pi$ la integral de la densidad, y tiene que dar σ_x^2 que vale 1).
Entonces, $G_y(e^{j\theta}) = 1 = G_x(e^{j\theta})|H_e(e^{j\theta})|^2$.
Debe ser entonces $|H_e(e^{j\theta})|^2 = 1/G_x(e^{j\theta})$.
Evidentemente quedan excluidos los valores límite de α porque ceros en el espectro de x resultarían en el filtro H_e inestable.

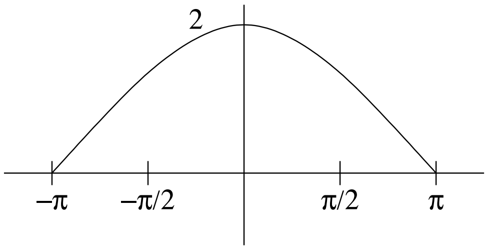
(f) H_e deberá ser el filtro inverso de H_1. Por lo tanto será $H_e(z) = 1/(\beta + \gamma z^{-1})$.
Verificación: $|H_e(e^{j\theta})|^2 = \frac{1}{\beta + \gamma e^{j\theta}} \cdot \frac{1}{\beta + \gamma e^{-j\theta}}$.
Operando queda $1/(\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma 2\cos\theta)$.

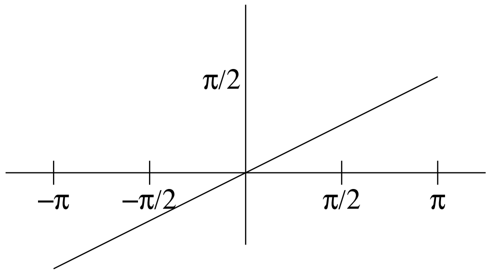
Problema 2

(a) Tomando transformadas, y llamando W a la entrada del retardo, se cumple: $W = X + W(1-2k)z^{-1}$, y por otra parte, $Y = W(1 + z^{-1})$. Entonces, $W = X/(1 - (1-2k)z^{-1})$, y la transferencia es $H = Y/X = \frac{1+z^{-1}}{1-(1-2k)z^{-1}} = \frac{z+1}{z-(1-2k)}$.

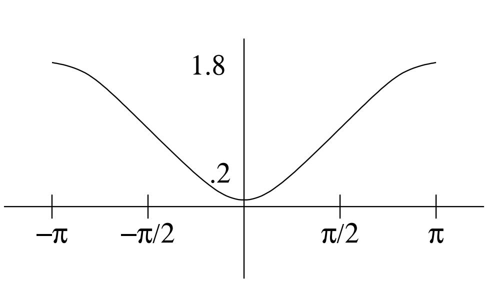
(b) El polo del sistema está en $z = 1 - 2k$, y debe tener módulo inferior a 1 para que el filtro sea estable. Por lo tanto, $-1 < 1 - 2k < 1$, o equivalentemente, $0 < k < 1$.

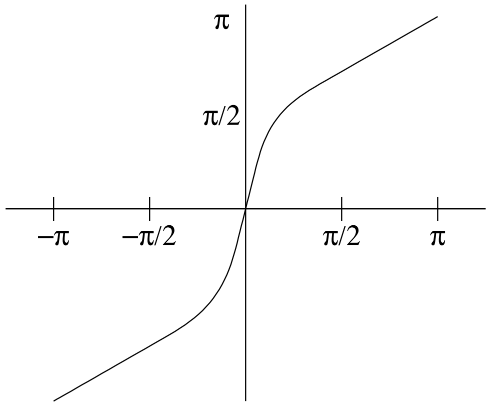
(c) La respuesta frecuencial es $H(e^{j\theta}) = \frac{e^{j\theta}+1}{e^{j\theta}-0.8}$.
Para bosquejar esta respuesta, estudiamos separadamente numerador y denominador.
El numerador $z + 1$ corresponde a un filtro de fase lineal (centrado en 1/2), con lo que su fase será $\theta/2$. El módulo vale 2 alrededor de $\theta = 0$; vale $\sqrt{2}$ en $\theta = \pi/2$; y en $\theta = \pi$ pasa por 0 con pendiente -1.



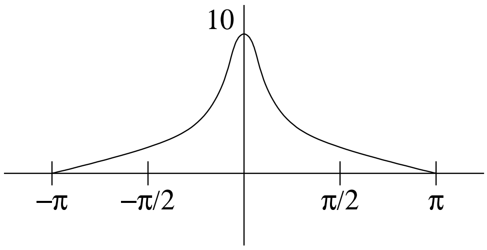


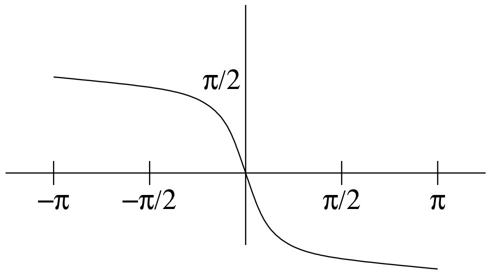
El denominador $z - 0.8$ tiene módulo 0.2 alrededor de $\theta = 0$, y 1.8 alrededor de $\theta = \pi$, y crece suavemente en el medio. La fase es más violenta, al estar 0.2 cerca del origen: en $\theta = 0$, la fase cruza 0 con pendiente 5; pasa por $\pi/2$ cuando $\cos(\theta) = 0.8$ (es decir, $\theta = 37$ grados); y cruza π en $\theta = \pi$ con pendiente $1/1.8 = 5/9$.





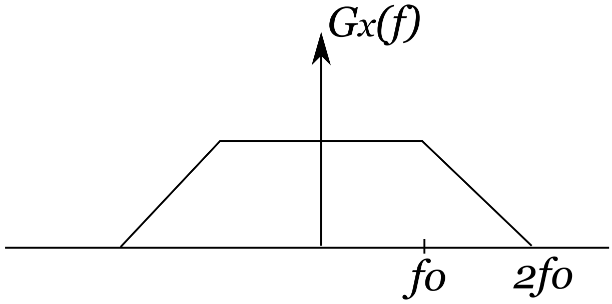
Haciendo el cociente de los módulos, y la resta de las fases, se obtiene la transferencia del filtro:





(d) La desidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo se puede expresar como:

$$G_x(f) = \Pi\left(\frac{f}{f_o}\right) * \Pi\left(\frac{f}{3f_o}\right)$$



Por lo que el ancho de banda de x es $2f_o$. La mínima frecuancia de muestreo es entonces $4f_o$.

(e) La autocorrelación del proceso en tiempo discreto verifica:

$$R_x[n] = R_x(nT_s).$$

Por lo tanto su densidad espectral de potencia en el intervalo $(-\pi, \pi]$ es, por el teorema del muestreo:

$$G_x(e^{j\theta}) = f_s G_x(\theta \frac{f_s}{2\pi})$$

$$G_x(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta \frac{f_s}{2\pi}}{f_o}\right) * \Pi\left(\frac{\theta \frac{f_s}{2\pi}}{3f_o}\right)$$

(f) Ver teórico.

(g) La potencia a la salida del filtro será,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2 \sigma_x^2 dt,$$

que, aplicando el teorema de Parsevall, puede hallarse calculando,

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = 1 + (1+0.8)^2 \frac{1}{1-0.8^2} = 10.$$