Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

29 de febrero de 2008

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Un proceso $x[n]$ estacionario, cuya densidad espectral de potencia es $G_x(e^{j\theta})$, es filtrado obteniendo a la salida el proceso $y[n]$. Si el filtro utilizado es SLIT estable con respuesta al impulso $h[n]$, deducir la relación que existe entre $G_x(e^{j\theta})$ y $G_y(e^{j\theta})$.

(b) Sea $x[n]$ un proceso con características de ruido blanco con potencia σ_x. Calcular la potencia a la salida de un filtro H con respuesta $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ si la entrada es el proceso x. Justificar todos los pasos.

Problema 1

Considere la siguiente función de transferencia de un sistema causal:

$$H(z) = \frac{1 - 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

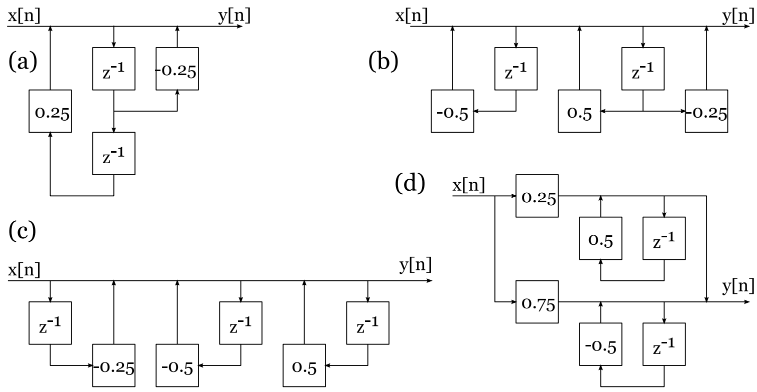
(a) Dar diagrama de ceros y polos de H.

(b) Estudiar estabilidad del filtro H.

(c) Deducir su ganancia (módulo y fase) a frecuencias 0 y π.

(d) Calcular su respuesta al impulso $h[n]$.

Los siguientes sistemas son 4 implementaciones de $H(z)$:



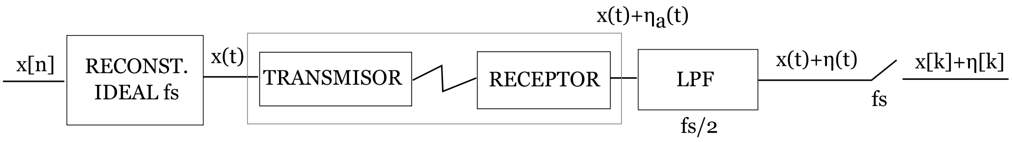
Las operaciones se realizan en punto fijo con redondeo y B bits en la parte fraccionaria.

(e) Para cada caso, dar el diagrama de bloques incluyendo el modelo lineal de ruido introducido en las operaciones.

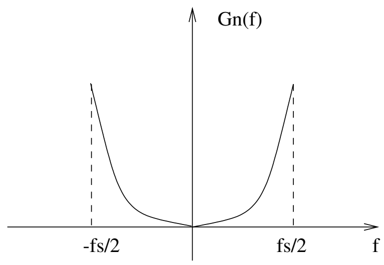
(f) Calcular la potencia de ruido a la salida de cada sistema debido a los errores en las operaciones.

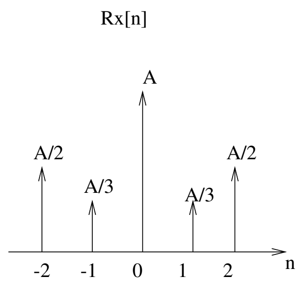
Problema 2

Se desea transmitir un proceso en tiempo discreto $x[n]$ a través de un sistema de comunicación analógico. El proceso x se reconstruye idealmente antes de ser transmitido y se vuelve a muestrear en el destino, como se muestra en la figura.



La autocorrelación de $x[n]$, $R_x[n]$, tiene cinco valores no nulos como puede verse en la figura.





(a) Calcular la densidad espectral de potencia de $x[n]$.

El sistema introduce ruido cuya densidad espectral de potencia es

$$G_{\eta a}(f) = (A_\eta f)^2/(f_s/2)^2.$$

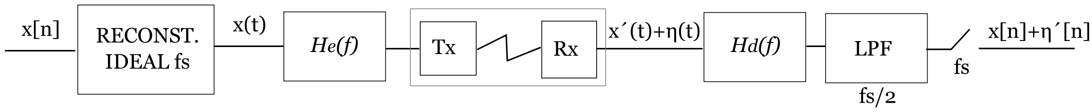
(b) Deducir la relación entre $\eta[n]$ y $\eta(t)$. ¿Es $\eta[n]$ estacionario en sentido amplio? Explicar.

(c) Calcular la relación señal a ruido a la salida del sistema propuesto (Potencia de señal sobre potencia del ruido).

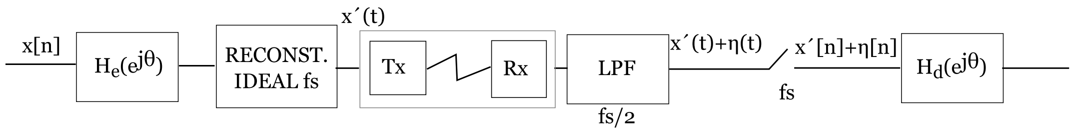
El ruido introducido en la transmisión afecta en mayor medida a las componentes de alta frecuencia. Es práctica habitual compensar este efecto filtrando la señal en tiempo continuo antes y después de la transmisión. En este caso el filtro antes de la trasmisión se toma de la forma,

$$H_e(f) = 1 + \frac{jf}{B}$$

donde $B \ll f_s/2$, de modo que sus componentes de alta frecuencia sean relativamente amplificados. Para recuperar la señal $x[n]$ será necesario pasarla después por el filtro inverso, de respuesta $H_d = 1/H_e$.



En este problema se implementará una aproximación digital de dichos filtros, como se muestra en la figura.



(d) Bosquejar la respuesta en frecuencia de $H_e(f)$ y $H_d(f)$.

(e) ¿Es posible implementar el filtro H_e en tiempo discreto? Justificar.

(f) Dar la respuesta en frecuencias en el rango válido para el sistema en tiempo discreto y hallar la correspondiente respuesta al impulso $h_e[n]$.

(g) Se desea aproximar H_e con un filtro FIR. Indicar cómo construirlo aproximadamente manteniendo la respuesta de fase lineal. Determinar la mínima cantidad de coeficientes necesarios para que los coeficientes elegidos tengan al menos el 90 % de la energía total del filtro, si $B = 0.1$.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Por la parte anterior se cumple:

$$G_y(e^{j\theta}) = G_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2$$

La potencia de $y[n]$ está dada por:

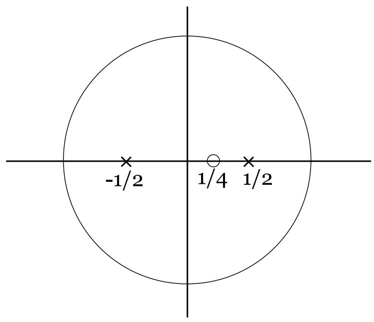
$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

Dado que x es ruido blanco, de desidad $G_x(e^{j\theta}) = \sigma_x^2$, y aplicando el teorema de Parseval se tiene:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = 2\sigma_x^2$$

Problema 1

(a) El diagrama de polos y ceros es el siguiente:

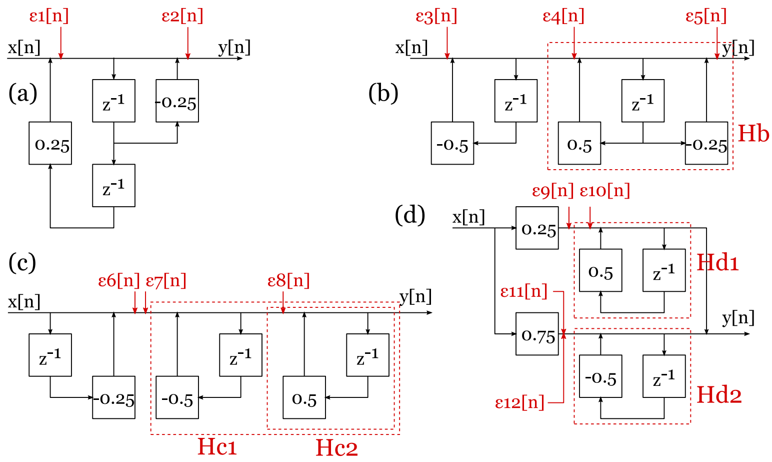


(b) Todos los polos del filtro caen dentro de la circunferencia unidad. Entonces la versión causal del filtro es estable ya que la región de convergencia contiene a la circunferenica unidad.

(c) Sustituyendo para la frecuencia angular 0, $z = e^{j0} = 1$, se tiene $H(1) = 1$.
Sustituyendo para la frecuencia angular π, $z = e^{j\pi} = -11$, se tiene $H(-1) = 5/3$.

(d) La parte recursiva del filtro $(1/(1-0.25z^{-2}))$ tiene respuesta al impulso $h_r[n] = 1, 0, 1/4, 0, 1/16, 0, 1/64, \ldots$ (esta secuencia tiene suma cuadrática $1/(1-1/16) = 16/15$, resultado que sirve para las partes siguientes).
La parte no recursiva superpone esta secuencia en los términos pares, y la misma secuencia multiplicada por $-1/4$ en los términos impares. Por lo tanto la respuesta al impulso será $h[n] = h_r[n] - 1/4h_r[n-1]$, que toma valores $1, -1/4, 1/4, -1/16, 1/16, -1/64, 1/64, \ldots$.

(e) Al trabajar con aritmética de punto fijo, los errores debidos a las operaciones se modelan como ruidos sumados a las salidas de los multiplicadores, independientes entre sí y de la señal y con las propiedades vistas en el teórico.



(f) Sea σ_ϵ^2 la potencia debida a una cualquiera de las fuentes de error.
Para el filtro (a), la potencia a la salida será $\sigma_a^2 = \sigma_\epsilon^2(1 + \sum h[n]^2)$.
Filtro (b): $\sigma_b^2 = \sigma_\epsilon^2(1 + \sum h[n]^2 + \sum h_b[n]^2)$.
Filtro (c): $\sigma_c^2 = \sigma_\epsilon^2(2\sum h_{c1}[n]^2 + \sum h_{c2}[n]^2)$.
Filtro (d): $\sigma_d^2 = \sigma_\epsilon^2(2\sum h_{d1}[n]^2 + 2\sum h_{d2}[n]^2)$.
Donde h_a, h_b, h_{c1}, h_{c2}, h_{d1} y h_{d2} son los filtros parciales indicados en la figura. Los resultados se obtienen por principio de superposición, y por ser todas las señales de error modeladas como independientes entre sí (las potencias se suman).
$\sum h_{c2}[n]^2$, $\sum h_{d1}[n]^2$ y $\sum h_{d2}[n]^2$ valen todos 4/3.
$\sum h_b[n]^2 = 13/12$ (hacer las cuentas, queda una única geométrica más un término suelto en $n = 0$).
$\sum h_{c1}[n]^2 = 16/15$, y $\sum h[n]^2 = 17/15$ (notar que $h_{c1}[n] = 1, 0, 1/4, 0, 1/16, 0, \ldots$, y $h[n]$ vale igual en los términos pares, y la misma serie dividida por 4 en los impares).
Por lo tanto, los resultados serán (llevados al mismo denominador): $\sigma_a^2 = 128/60\sigma_\epsilon^2$, $\sigma_b^2 = 193/60\sigma_\epsilon^2$, $\sigma_c^2 = 208/60\sigma_\epsilon^2$, y $\sigma_d^2 = 320/60\sigma_\epsilon^2$.
Es en cierto modo esperable (aunque no necesario) que el filtro con menor cantidad de productos de la menor potencia de ruido a la salida.

Problema 2

(a) La densidad espectral del proceso x se obtiene haciendo la transormada de Fourier de su autocorrelación, es decir:

$$X(e^{j\theta}) = A\left(1 + \frac{e^{-2\theta} + e^{2\theta}}{2} + \frac{e^{\theta} + e^{\theta}}{3}\right)$$

es decir:

$$X(e^{j\theta}) = A(1 + \cos 2\theta + \frac{2}{3}\cos\theta)$$

(b) Se cumple que $\eta[n] = \eta(nT_s)$, siendo $T_s = \frac{1}{f_s}$. Como $\eta_a(t)$ es estacionario, su versión filtrada por un SLIT, $\eta(t)$ también lo será. Luego, como se vió en el teórico, de muestrear un proceso estacionario en sentido amplio en tiempo continuo resulta un proceso estacionario en sentido amplio en tiempo discreto. Sus densidades espectrales de potencia se relacionan por:

$$G_\eta(e^{j\theta}) = G(f)|_{f=\frac{\theta f_s}{2\pi}}$$

(c) La potencia de x está dada por:

$$\sigma_x^2 = R_x[0] = A$$

La potencia del ruido es

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_\eta(e^{j\theta})d\theta =$$

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_\eta^2\theta^2}{\pi^2}d\theta = \frac{A_\eta^2}{3}$$

Por lo tanto, la SNR es:

$$SNR = \frac{3A}{A_\eta^2}$$

(e) La respuesta en frecuencia del filtro analógico H_e no se anula a partir de ninguna frecuencia. No sólo no se anula sino que ni siquiera toma valores de módulo acotado, ya que $|1+\frac{jf}{B}|$ tiende a infinito cuando f tiende a infinito. Eso hace que el filtro no sea implementable en el mundo discreto ya que el rango de frecuencias soble el que se trabaja es limitado.
Es necesario que el filtro a aproximar tome una respuesta en frecuencia nula a partir de cierta frecuencia de manera que la periodización de la respuesta del filtro al trabajar en tiempo discreto no se solape y la haga cambiar.

(f) Se puede aproximar el comportamiento aproximado al filtro por su comportamiento en el rango de frecuencias con el que se trabaja en tiempo discreto $[-f_s/2, f_s/2]$, es decir:

$$H_e(f) = \left(1+\frac{jf}{B}\right)\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

entonces la antitransformada es:

$$h_e(t) = f_s sinc(f_s t) + \frac{f_s^2 sinc'(f_s t)}{2\pi B}$$

obteniendo:

$$h_e[n] = T_s h_e(nT_s) = sinc(n) + f_s\frac{sinc'(n)}{2\pi B}$$

Donde:

$$sinc'(n) = \frac{\pi n\cos\pi n - \sin\pi n}{\pi n^2}$$

para n distinto de 0, siendo $sinc'(0) = 0$.

(g) Para implementar el filtro manteniendo la fase lineal el filtro debe tener coeficientes simétricos o antisimétricos. Esto se puede lograr enventanando la respuesta al impulso de forma que quede centrada en el centro de simetría.
La energía total del filtro es:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_e(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

y como

$$|H_e(e^{j\theta})|^2 = \left(1+\frac{\theta^2 f_s^2}{4\pi^2 B^2}\right)\Pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

Obteniendo $E = 1 + \frac{f_s^2}{12B^2}$
La energía del FIR $\hat{h_e}$ puede calcularse por Parseval como:

$$E_k = \sum_{n=-k}^{n=k}\hat{h_e}^2[n]$$

El menor k para el cual $E_k > 0.9E$ es el buscado. Como la letra no da valor de f_s, no puede hallarse numericamente.