Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de diciembre de 2007

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

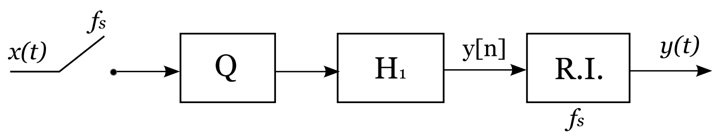
(a) Enunciar el teorema del muestreo.

(b) Demostrar el teorema del muestreo.

(c) Sea $x_c(t) = \cos(3400 \cdot 2\pi t) + 3\cos(69900 \cdot 2\pi t)$ una señal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 7000\,\mathrm{Hz}$. $y_c(t)$ es la reconstrucción ideal de $x[n]$. Hallar $y_c(t)$.

Problema 1

El sistema de la figura implementa un derivador en tiempo continuo, procesando internamente la señal en tiempo discreto. El filtro H_1 es un derivador ideal de respuesta en frecuencia, $H_1(e^{j\theta}) = jf_s\theta$ con $\theta \in [-\pi, \pi)$. El proceso en tiempo continuo $x(t)$ es muestreado a frecuencia f_s utilizando una cuantificación de 8 bits. El proceso $x(t)$ ya es de banda limitada a 16 kHz y toma valores en el intervalo $(-1, 1)$.



(a) Hallar la frecuencia de muestreo mínima para la cual el sistema se comporta como un derivador.

(b) Dar un modelo lineal para los errores debidos a la cuantización, detallando bajo qué hipótesis es válido dicho modelo.

(c) Hallar la potencia del ruido de cuantización a la salida del filtro derivador, utilizando la frecuencia de muestreo hallada en la parte (a).

Ahora se busca sustituir el bloque derivador ideal del sistema anterior por una implementación real. Se utilizará la siguiente,

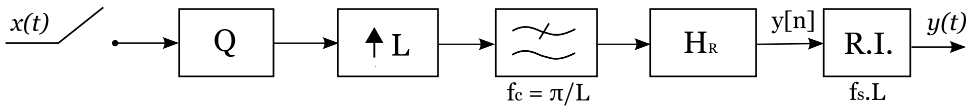
$$y[n] = f_s\left(x[n] - x[n-1]\right)$$

(d) Hallar la respuesta frecuencial del filtro propuesto. Graficar módulo y fase por lo menos en el intervalo $[-1.5\pi, 1.5\pi]$.

Se considerará que el filtro es una buena aproximación de un derivador para aquellas frecuencias tales que $\left(|H_1(e^{j\theta})| - |H_R(e^{j\theta})|\right)/|H_1(e^{j\theta})| \leq 0.05$.

(e) Determinar el rango de frecuencias angulares para el cual el filtro H_R aproxima satisfactoriamente al filtro ideal H_1.

El muestreador tiene frecuencia de muestreo igual a la hallada en la parte (a) y es fija. Por lo que el cambio de frecuencia de muestreo debe realizarse utilizando sobremuestreo como se muestra en la figura.



(f) Determinar el menor valor de L para que el sistema se comporte como un derivador.

(g) Bosquejar el espectro de la señal luego de cada bloque del sistema. Suponer que $G_x(f) = \Lambda\left(\frac{f}{16000}\right)$.

Problema 2

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal tiene la función de transferencia siguiente:

$$H(z) = \frac{1 - 2.3z^{-1} - 1.7z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} - 0.25z^{-2} - 0.2z^{-3}} = \frac{1 - 2.3z^{-1} - 1.7z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}$$

(a) Encuentre una ecuación en diferencias que relacione la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$ para este sistema.

(b) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

(c) Estudiar la estabilidad del sistema.

(d) El sistema se implementa conectando en paralelo un filtro canónico de segundo orden y un filtro canónico de primer orden. Al filtro de primer orden se le hace corresponder el polo de mayor módulo. Dibujar el diagrama de bloques correspondiente indicando el valor de todos los coeficientes.

(e) Las operaciones se realizan con registros de punto fijo, con B bits de parte fraccionaria, y redondeo. Calcular la potencia a la salida del filtro debido a los errores introducidos en las operaciones.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) A partir de los resultados intermedios del teorema del muestreo, se ve que los componentes que quedan entre $\pm f_s/2$ son: $\pm 3400\,\mathrm{Hz}$ y $\pm(69900\,\mathrm{Hz} - 10 \cdot f_s) = \pm 100\,\mathrm{Hz}$. Por lo tanto la salida será $y_c(t) = 3\cos(100 \cdot 2\pi t) + \cos(3400 \cdot 2\pi t)$.

Problema 1

(a) El sistema se comportará como un derivador siempre que se trabaje bajo las hipótesis del teorema de muestreo. Es decir que $16kHz \leq f_s/2$, por lo que la mínima frecuencia de muestreo será $f_s = 32KHz$.

(b) Ver teórico.

(c) Los errores debidos a la cuantificación se modelan como una fuente de ruido aditivo blanco con distribución uniforme en el intervalo $[-\Delta/2, \Delta/2]$ con $\Delta = 2^{-7}$. Por lo tanto su densidad espectral de potencia es constante y vale $\sigma^2 = \Delta^2/12$. Llamemeos $y_e[n]$ a la secuencia que se obtiene a la salida del filtro derivador. Su densidad espectral de potencia será,

$$G_{yr}(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_e(e^{j\theta}) = \sigma^2\theta^2$$

Por lo tanto la potencia está dada por,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma^2\theta^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\sigma^2\pi^2}{3}$$

(d) Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación en diferencias que describe la relación entrada salida en el sistema se tiene,

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{f_s}{2}X(e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta}) = j2f_s e^{\frac{j\theta}{2}} \sin\theta/2 X(e^{j\theta})$$

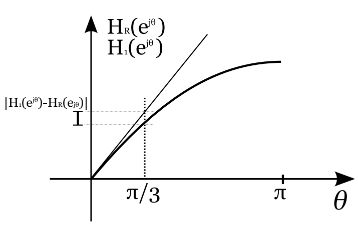
Por lo que la respuesta en frecuencias resulta,

$$H(e^{j\theta}) = j2f_s e^{\frac{j\theta}{2}} \sin\theta/2$$

(e) Sustituyendo los filtros hallados tenemos,

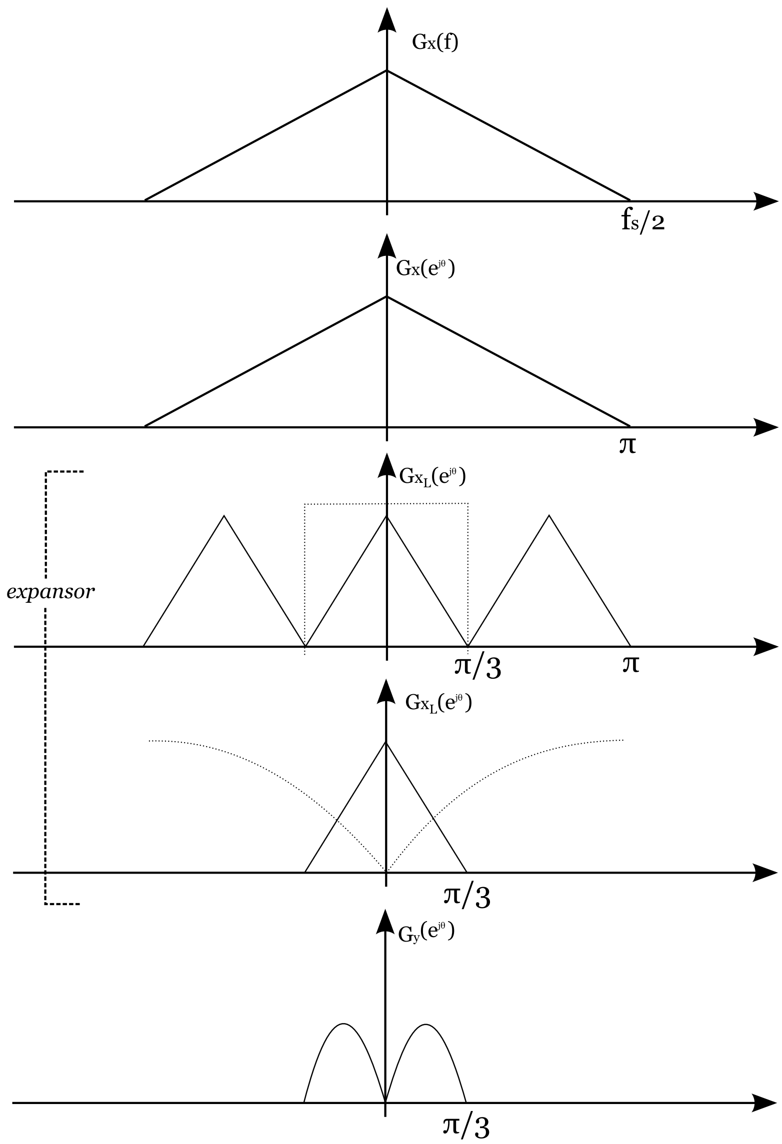
$$0.05 \geq \frac{f_s\theta - 2f_s\sin\theta/2}{f_s\theta} \geq \frac{\theta - 2\sin\theta/2}{\theta}$$

Puede verse que el rango de valores es independiente del valor de la frecuencia de muestreo utilizada. Despejando de la ecuación anterior y sustituyendo el seno por su desarrollo de Taylor se llega a que $|\theta| \leq \theta_m = 1.09$.



(f) La señal tiene componentes hasta los 16 kHz, por lo que luego del muestreo (utilizando la frecuencia hallada en la parte (a)) el rango de frecuencias entre cero y 16 kHz se corresponden con el intervalo cero π.
El cambio de la frecuencia de muestreo debe llevar π a una frecuencia angular menor o igual a θ_m. Es decir que $\pi/L \leq \theta_m$. Esto se da para $L = 3$.

(g)



Problema 2

(a) Como $Y(z) = H(z)X(z)$, y antitransformando:

$$y[n] + 0.8y[n-1] - 0.25y[n-2] - 0.2y[n-3] = x[n] - 2.3x[n-1] - 1.7x[n-2]$$

(b) El sistema tiene 3 polos simples en $z = 0.5$, $z = -0.5$ y $z = -0.8$. Entonces la transferencia se puede expresar en fracciones simples. Igualando coeficientes, resulta:

$$H(z) = \frac{-2}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} + \frac{2}{1 + 0.8z^{-1}}$$

Y la respuesta impulsiva se calcula directamente:

$$h[n] = u[n]\big(-2(0.5)^n + (-0.5)^n + 2(-0.8)^n\big)$$

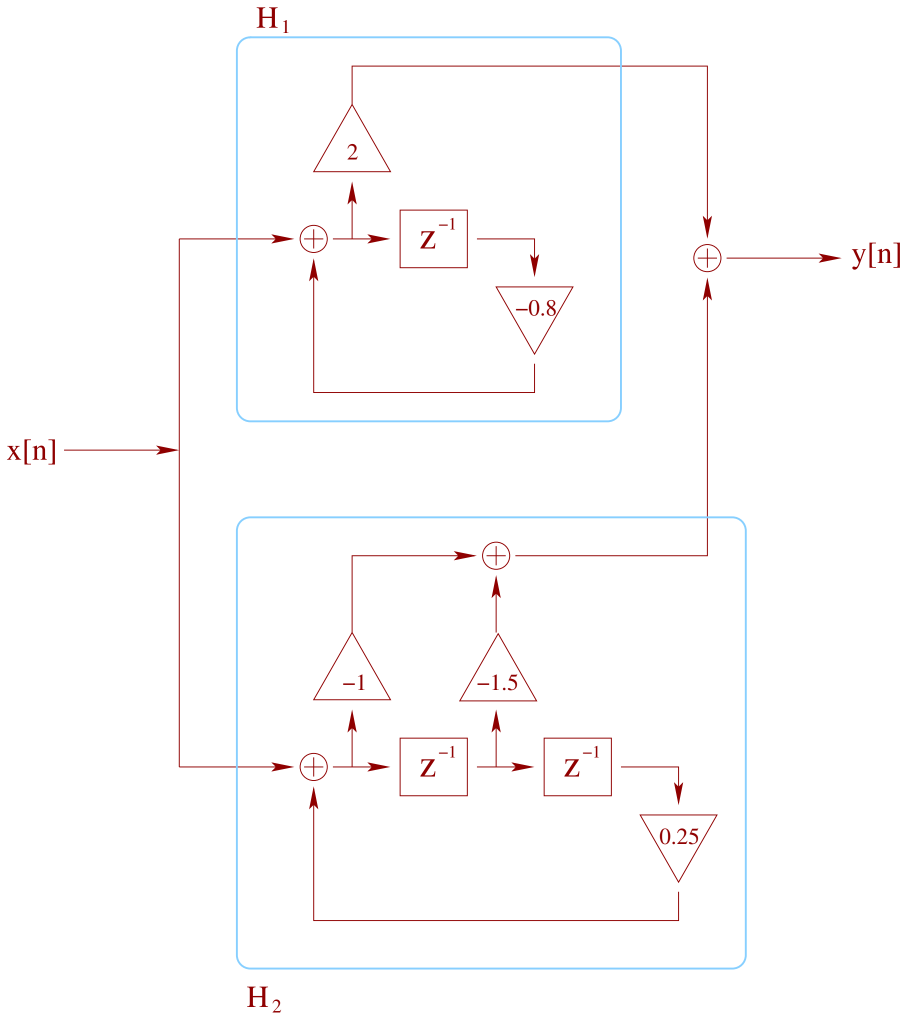
(c) Los tres polos se encuentran dentro del círculo unidad, y el sistema es causal, por lo tanto la región de convergencia incluye al círculo unidad. Por lo tanto el sistema es estable.

(d) Descomponemos el filtro en dos,

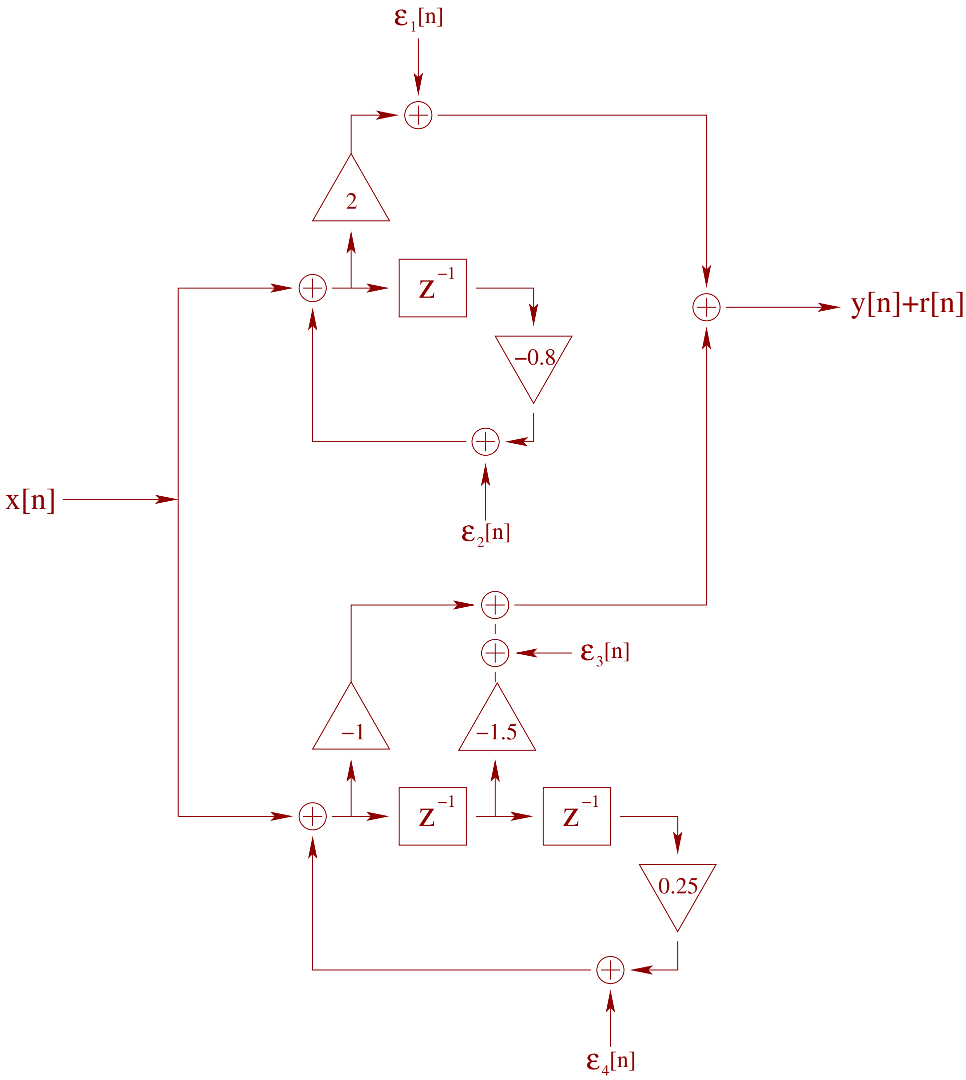
$$H_1(z) = \frac{2}{1 + 0.8z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{-2}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{-1 - 1.5z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

y los ponemos en paralelo. El sistema que obtenemos es:



(e) Al aplicar el modelo de ruido de punto fijo obtenemos el siguiente sistema:



Los $\epsilon_i[n]$ son procesos estocásticos blancos, de media nula y potencia $\sigma^2 = 2^{-2B}/12$. Ademas, son independientes entre sí y de las otras señales del sistema. La multiplicación por -1 no introduce errores pues es simplemente cambiar de signo. (La multiplicación por 2 también se podría hacer sin errores pues al usar notación binaria es simplemente hacer un corrimiento de cifras de una posición.)
Llamaremos $r[n]$ a la salida debida a errores. Entonces, el ruido es:

$$r[n] = \epsilon_1[n] + \epsilon_2[n] * h_1[n] + \epsilon_3[n] + \epsilon_4[n] * h_2[n]$$

Como los ruidos son independientes y de media nula (pues se usa redondeo), podemos estudiar la potencia de cada uno en forma independiente y luego sumarlas.

$$\sigma_r^2 = \sigma^2 + \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1^2[k] + \sigma^2 + \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_2^2[k]$$

De lo encontrado antes,

$$h_1[n] = u[n]2(0.8)^n$$

$$h_2[n] = u[n]\big(-2(0.5)^n + (-0.5)^n\big) = \begin{cases} -(0.5)^n & n \geq 0 \text{ par} \\ -3(0.5)^n & n \geq 0 \text{ impar} \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Usando la fórmula de suma de la serie geométrica obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1^2[k] = \frac{4}{1-(0.8)^2}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[2k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[2k+1]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2^2[k] = \sum_{k=0}^{\infty}(0.25)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 9(0.25)^{2k+1} = \frac{3.25}{1-0.0625}$$

Como $\sigma^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$, el resultado final es

$$\sigma_r^2 = \frac{2^{-2B}}{12}\left(2 + \frac{4}{1-(0.8)^2} + \frac{3.25}{1-0.0625}\right)$$