Muestreo y Procesamiento Digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de diciembre de 2005

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

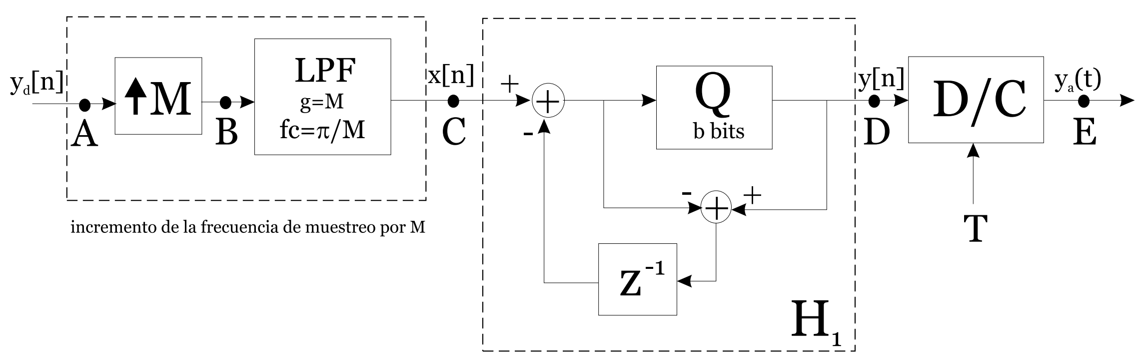
Sea $x_c(t)$ un proceso estocástico en tiempo continuo, estacionario en sentido amplio. Este proceso se muestrea a una tasa de T segundos por muestra, para obtener el proceso estocástico en tiempo discreto $x[n] = x_c(nT)$.

(a) Probar que el proceso en tiempo discreto es *estacionario en sentido amplio*.

(b) Si $h_d[n]$ es la respuesta al impulso de un SLIT estable y $x[n]$ es su entrada, probar que la salida es *estacionaria en sentido amplio*. Expresar la autocorrelación del proceso de salida en función de la autocorrelación del proceso de entrada y de $h_d[n]$.

Problema 1

Se analizará un ejemplo de moldeado de ruido por sobremuestreo para la conversión de señales digitales a analógicas. El sistema que realiza esta conversión se muestra en la figura. El bloque de conversión utiliza un re-cuantizador de b bits.



(a) Hallar la transferencia $H_m(z)$ del bloque H_1 respecto a su entrada.

(b) Si el proceso $y_d[n]$ tiene *Densidad Espectral de Potencia* $G_{yd}(e^{j\theta}) = \Lambda(\frac{\theta}{\pi})$, graficar el espectro en los puntos A, B, C, D y E.

(c) Hallar la transferencia $H_n(z)$ del bloque H_1 respecto al ruido de cuantización introducido, asumiendo que la cuantización se realiza por redondeo.

(d) Hallar y bosquejar la *Densidad Espectral de Potencia* del ruido de cuantización a la salida del bloque H_1.

(e) Hallar la potencia del ruido en la señal reconstruída. Realizar las aproximaciones que crea convenientes.

(f) Comparar la potencia del ruido en la salida si la conversión se hubiera realizado sin el sobremuestreo ni H_1. Es decir, sólo con los bloques de cuantización y de recostrucción.

(g) ¿Es válido utlizar el modelo del ruido planteado para cualquier valor de M? Justificar.

Problema 2

Sea el sistema de tiempo discreto de transferencia

$$H(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}}, \text{ con } |a| < 1 \text{ y } |b| > 1.$$

(a) ¿Cuál es la región de convergencia de $H(z)$ para el caso de un sistema causal y estable?

(b) Consideremos $H_i(z)$, el sistema inverso de $H(z)$.

- Escribir la transferencia $H_i(z)$.
- ¿Puede este sistema ser causal y estable? ¿Por qué?
- Dar la región de convergencia para $H_i(z)$ de forma que el sistema sea estable.
- Calcular la respuesta al impulso de este sistema $h_i[n]$.
- ¿Por qué es difícil en la práctica implementar directamente $h_i[n]$? Explicar.

(c) Ahora consideraremos una aproximación del sistema inverso, $\hat{h}_i[n]$, que será una versión retardada y enventanada de $h_i[n]$:

$$\hat{h}_i[n] = h_i[n - M](u[n] - u[n - M])$$

Hallar el mínimo M tal que el 99.9 % de la energía total de la secuencia $h_i[n]$ esté contenida en $\hat{h}_i[n]$ tomando $a = 1/3$ y $b = 2$.

(d) Dar la expresión de $\hat{H}_i(e^{j\theta})$ como función de $H_i(e^{j\theta})$ y M. Cualitativamente, ¿cuál será la diferencia entre $|\hat{H}_i(e^{j\theta})|$ y $|H_i(e^{j\theta})|$?

(e) La convolución de $\hat{h}_i[n]$ con $h[n]$ (respuesta al impulso correspondiente a $H(z)$) debería ser una buena aproximación de una secuencia conocida. Describa esta secuencia.

(f) Dibuje la implementación en forma canónica de $h[n]$ y $\hat{h}_i[n]$.

Solución

Pregunta

(a) Hay que probar que $E\{x[n]\}$ y $E\{x[n]x[n+m]\}$ son independientes de n. Pero

$$E\{x[n]\} = E\{x_c(nT)\} = m_{x_c}$$

$$E\{x[n]x[n+m]\} = E\{x_c(nT)x_c((n+m)T)\} = R_{x_c}(mT)$$

son independientes de n por ser x_c estacionario en sentido amplio.

(b)

$$E\{y[n]\} = E\left\{\sum_k h_d[k]x[n-k]\right\} = \sum_k h_d[k]E\{x[n-k]\} = m_x \sum_k h_d[k]$$

$$E\{y[n]y[n+m]\} = E\left\{\sum_k h_d[k]x[n-k]\sum_j h_d[j]x[n+m-j]\right\} =$$

$$= \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]E\{x[n-k]x[n+m-j]\} = \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]R_x[m+k-j]$$

Ambas expresiones son independientes de n, lo que muestra que la salida $y[n]$ es estacionaria en sentido amplio. La autocorrelación en la salida es

$$R_y[m] = \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]R_x[m+k-j]$$

Problema 1

(a) Las ecuaciones para el sistema son:

$$Y(z) = E(z) + W(z)$$

$$W(z) = X(z) - z^{-1}(Y(z) - W(z))$$

Donde $W(z)$ es la señal antes de la cuantización.
Despejando $w(z)$:

$$W(z) = \frac{X(z) - Y(z)z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

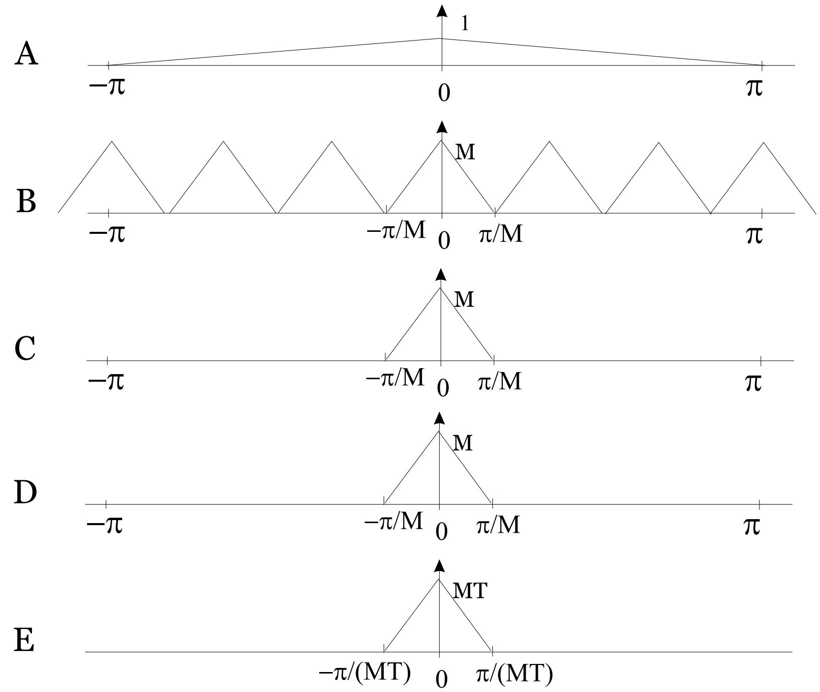
entonces:

$$Y(z) = E(z) + \frac{X(z) - Y(z)z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Anulando $e(z)$ tenemos:

$$H_m(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1$$

(b)



(c) Ahora anulamos X en la ecuación:

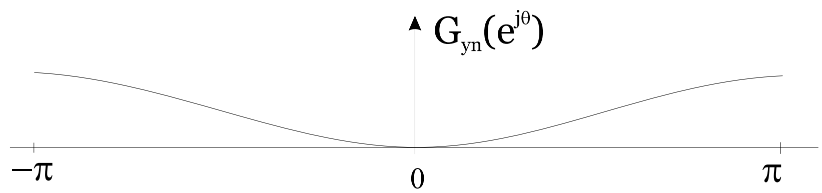
$$Y(z) = E(z) + \frac{X(z) - Y(z)z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

y tenemos que

$$H_n(z) = \frac{Y(z)}{e(z)} = 1 - z^{-1}$$

(d) El ruido en la cuantización lo consideramos blanco, la densidad espectral de potencia será entonces:

$$G_{yn} = \sigma_e^2 |H_n(e^{j\theta})|^2 = \sigma_e^2 |1 - e^{-j\theta}|^2 = 4\sigma_e^2 sin^2(\theta/2)$$



(e) Luego de la reconstrucción: $G_{ny}(jw) = 4\sigma_e^2 T sin^2(wT/2)$
La potencia del ruido aparece en el rango de frecuencias de 0 a $\frac{\pi}{MT}$.
La potencia del ruido es entonces:

$$S_n = \int_{-\frac{\pi}{MT}}^{\frac{\pi}{MT}} 4\sigma_e^2 T sin^2(wT/2) dw \approx 4\sigma_e^2 T \int_{-\frac{\pi}{MT}}^{\frac{\pi}{MT}} (wT/2)^2 dw$$

$$S_n = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{M}\right)^3 \sigma_e^2$$

(f) La densidad espectral de potencia del ruido luego de la recostrucción hubiera sido: $T\sigma_e^2$. La potencia sería entonces:

$$S_n' \int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T\sigma_e^2 dw = 2\pi\sigma_e^2$$

Si M es mayor a 2 ya se obtiene una potencia menor de ruido en la reconstrucción si se utiliza el moldeado de ruido.

(g) No. Deja de cumplirse la hipótesis de señal compleja en la cuantización. Para un valor grande de M, las muestras sucesivas de $w[n]$ toman valores similares.

Problema 2

(a) ROC: $|z| > |a|$

(b)

$$H_i(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}$$

Este sistema no puede ser causal y estable puesto que tiene un polo fuera del círculo unidad. Para que sea estable la ROC es: $|z| < |b|$

$$h_i[n] = -b^n u[-n-1] + ab^{n-1}u[-n]$$

No es posible implementarlo directamente puesto que tiene infinitos coeficientes y no es causal.

(c) Energía$(h_i[n]) = \sum_{-\infty}^{\infty} |h_i[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |-b^n u[-n-1] + ab^{n-1}u[-n]|^2 =$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b^{2n}u[-n-1] + a^2 b^{2(n-1)}u[-n] - 2ab^{2n-1}u[-n-1] =$$

$$\sum_{1}^{\infty} b^{-2k} + \sum_{0}^{\infty} a^2 b^{2(-k-1)} + \sum_{1}^{\infty} -2ab^{-2k-1} =$$

$$\frac{1}{b^2-1} + \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{b^2-1} - \frac{2a}{b}\frac{1}{b^2-1} = \frac{7}{27}$$

Energía$(\hat{h_i}[n]) = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{h_i}[n]|^2 =$

$$\sum_{1}^{M} b^{-2k} + \sum_{0}^{M} a^2 b^{2(-k-1)} + \sum_{1}^{M} -2ab^{-2k-1} =$$

$$\frac{\frac{1}{b^2} - (\frac{1}{b^2})^{M+1}}{1 - \frac{1}{b^2}} + \frac{a^2}{b^2}\frac{\frac{1}{b^2} - (\frac{1}{b^2})^{M+1}}{1 - \frac{1}{b^2}} - \frac{2a}{b}\frac{\frac{1}{b^2} - (\frac{1}{b^2})^{M+1}}{1 - \frac{1}{b^2}} = \frac{7}{27} - \frac{100}{108}(\frac{1}{4})^{M+1}$$

Para contener el 99.9 % de la energía el mínimo M es 5 ($\frac{25}{7}(\frac{1}{4})^{M+1} \leq 0.001$).

(d)

$$\hat{H}_i(e^{j\theta}) = e^{-j\frac{M}{2}\theta}.H_i(e^{j\theta}) * W(e^{j\theta})$$

donde $W(e^{j\theta})$ es la transformada de Fourier de la ventana rectangular.

(e) La secuencia debe ser idealmente una delta pero como el sistema inverso esta aproximado por un filtro FIR tendremos además de la delta un número finito de componentes espurios en la convolución.

(f)