Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

21 de diciembre de 2004

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

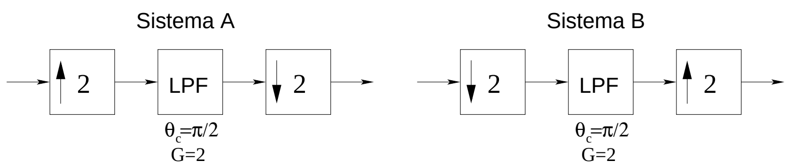
Pregunta

Dada una señal $x[n]$ con DTFT $X(e^{j\theta})$,

(a) Deducir el espectro a la salida de un compresor $\rightarrow\boxed{\downarrow N}\rightarrow$.

(b) Deducir el espectro a la salida de un expansor $\rightarrow\boxed{\uparrow L}\rightarrow$.

(c) Indicar si los sistemas siguientes son SLITs. Justificar.

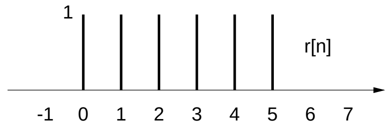


Problema 1

Se pretende detectar transiciones (bordes) en una señal $x(t)$. Esta señal tiene ancho de banda W, y se le toman muestras $x[n]$ a frecuencia $f_s > 2W$.
Se propone como detector de bordes al siguiente filtro digital:

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$

(a) Hallar y graficar la respuesta al impulso, al escalón ($u[n]$), y a la señal $r[n]$ que se muestra en la figura. ¿Por qué es un *detector de transiciones*?



(b) Dar un diagrama de bloques que implemente este filtro, detallando las consideraciones necesarias para la implementación.

Se propone ahora el siguiente filtro:

$$g[0] = -A$$
$$g[n] = \frac{A}{2N} \text{ para } 1 \leq |n| \leq N$$
$$g[n] = 0 \ si \ |n| > N$$

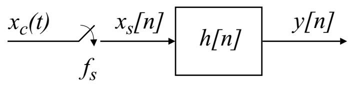
(c) Hallar la respuesta en frecuencia para un N genérico.

(d) Evaluar la respuesta en frecuencia para $\theta = 0$ y bosquejar si N es suficientemente grande. Interpretar el comportamiento en frecuencia del filtro.

(e) Para $N = 2$, hallar la potencia a la salida del filtro g debida al ruido de cuantización en la entrada y al ruido introducido en las operaciones, si se utiliza una representación en punto fijo con redondeo.

Problema 2

Sean $x_s[n]$ una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo $x_c(t)$, muestreado con una frecuencia $f_s = 1/T_s$. Las muestras $x_s[n]$ son filtradas con un filtro de respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$.



(a) Hallar una expresión para la autocorrelación de x_s, $R_{x_s}[n]$, en función de la autocorrelación de $x_c(t)$, $R_{x_c}(\tau)$

(b) Sea $G_{x_c}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right)$ la densidad espectral de $x_c(t)$. Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de $x_s[n]$, $G_{x_s}(e^{j\theta})$. Bosquejar $G_{x_s}(e^{j\theta})$ indicando las características (altura, frecuencias particulares, etc.)

(c) Hallar $R_{x_s}[n]$, en las condiciones de la parte anterior.

(d) Dar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal de salida del filtro, $y[n]$, $G_y(e^{j\theta})$.

(e) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro es el definido por la ecuación de recurrencia: $y[n] = x_s[n] - a\, x_s[n-1]$.

(f) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro tiene transferencia $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$, con $\theta_0 f_s = 2\pi f_0$.

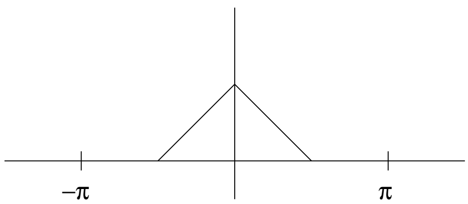
Solución

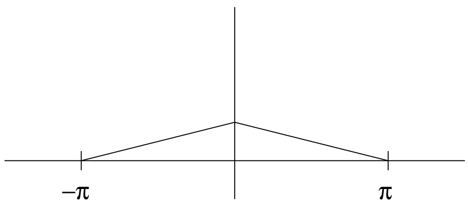
Pregunta

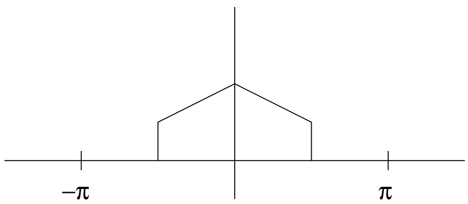
(a) Ver teórico.

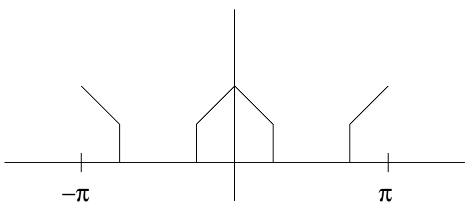
(b) Ver teórico.

(c) En el sistema A la salida es idéntica a la entrada, ya que es un sistema correcto para subir la fecuencia de muestreo al doble y luego bajarla a la mitad, donde no hay solapamiento y la frecuencia de muestreo final es igual a la de entrada. Por lo tanto el sistema es equivalente al sistema identidad y es un SLIT.
El sistema B no es SLIT. Tanto el compresor como el expansor pueden producir alinealidades. Alcanza con un contraejemplo para demostrar que no es lineal. Los cuatro esquemas siguientes representan una entrada particular, las dos señales intermedias y la salida del sistema B, respectivamente:







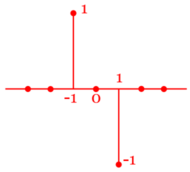


Podemos ver que en la salida hay componentes en frecuencias donde no ninguna en la entrada, cosa que no puede ocurrir en sistemas lineales. Por lo tanto el sistema no es SLIT.

Problema 1

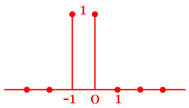
(a) La respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$



La respuesta al escalón es:

$$y_e[n] = -u[n-1] + u[n+1] = \delta[n+1] + \delta[n]$$

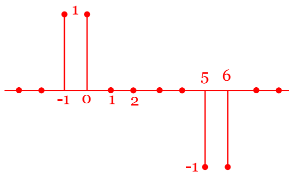


$r[n]$ se puede escribir como

$$r[n] = u[n] - u[n-6]$$

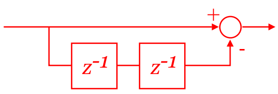
Entonces,

$$y_r[n] = y_e[n] - y_e[n-6] = \delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-5] - \delta[n-6]$$



Es un detector de bordes porque a la salida, la amplitud es proporcional a los cambios en la señal, y no a su nivel (continua).

(b)



El filtro implementado es causal, con lo que la respuesta al impulso queda

$$\delta[n] - \delta[n-2].$$

(c) Encontremos la respuesta en frecuencia:.

$$H_N(z) = -A + \frac{A}{2N}\sum_{k=1}^{N}(z^k + z^{-k}) = -A + \frac{A}{2N}\left(\frac{z - z^{N+1}}{1-z} + \frac{z^{-1} - z^{-N-1}}{1-z^{-1}}\right)$$

$$H_N(z) = A\left(-1 - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1}\right)$$

Evaluando en $e^{j\theta}$,

$$H_N(e^{j\theta}) = A\left(-\frac{2N+1}{2N} + \frac{1}{2N}\frac{\sin((N+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)$$

Observe que $H_N(e^{j\theta})$ es real.

(d)

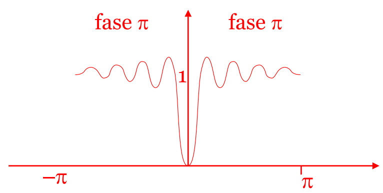
$$H_N(e^{0}) = A\left(-\frac{2N+1}{2N} + \frac{1}{2N}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin((N+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)$$

Y haciendo una aproxiomación de primer orden para los senos

$$H_N(e^{0}) = A\left(-\frac{2N+1}{2N} + \frac{1}{2N}\frac{(N+1/2)}{1/2}\right)$$

$$H_N(e^{0}) = A\left(-\frac{2N+1}{2N} + \frac{2N+1}{2N}\right) = 0$$

Para N la respuesta frecuencial será de la forma



(e) Modelamos el ruido $r(n)$ como blanco, de distribución uniforme $U[-\Delta/2, \Delta/2]$. Entonces, $\mathbb{E}\{r[n]\} = 0$ y $\mathbb{E}\{r^2[n]\} = \frac{\Delta^2}{12}$ y $R_r[n] = \frac{\Delta^2}{12}\delta[n]$. Por lo tanto,

$$G_r(e^{j\theta}) = \frac{\Delta^2}{12}$$

y

$$G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2\frac{\Delta^2}{12}$$

Antitransformando,

$$R_{yq}[n] = \frac{\Delta^2}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\theta})|^2 e^{jn\theta}d\theta$$

$$\sigma_{yq}^2 = R_y[0] = \frac{\Delta^2}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

Aquí podemos utilizar el teorema de Parseval,

$$\sigma_{yq}^2 = \frac{\Delta^2}{12}\sum_k |h[k]|^2 = \frac{\Delta^2}{12}\left(A^2 + 2N\frac{A^2}{4N^2}\right)$$

$$\sigma_{yq}^2 = \frac{\Delta^2}{12}A^2\left(1+\frac{1}{2N}\right)$$

Evaluando para $N = 2$ tenemos

$$\sigma_{yq}^2 = \frac{5\Delta^2}{48}A^2$$

El ruido introducido debido a las operaciones es blanco, aditivo, uniforme, siendo independientes entre sí, independientes del ruido de cuantización e independientes de la señal. Estas fuentes de ruido se introducen luego de cada multiplicador y utilizando la implementación de la forma directa, éstos son introducidos directamente en la salida. Para $N = 2$ tenemos 5 multiplicadores, entonces la potencia del ruido debido a las operaciones es:

$$\sigma_{yo}^2 = 5\frac{\Delta^2}{12}.$$

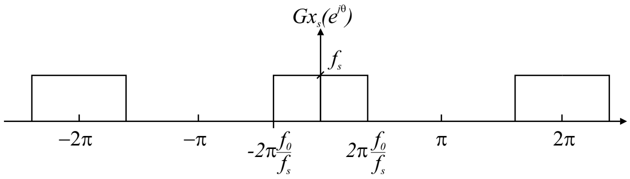
Finalmente, la potencia total del ruido en la salida (considerando que todas las fuentes de ruido son indepencientes y de media nula) es

$$\sigma_{yq}^2 = \frac{5\Delta^2}{12}\left(\frac{1}{4}A^2+1\right).$$

Problema 2

(a) $R_{x_s}[n] = \mathbb{E}\{x_s[m]x_s[m+n]\} = \mathbb{E}\{x_c(mT_s)x_c((m+n)T_s)\} = R_{x_c}(nT_s)$

(b) $R_{x_c}(\tau)$ es una señal de banda acotada en f_o. Según el teorema de muestreo, para no tener solapamiento debemos utilizar una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_o$.



(c) $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ donde $\theta_o = 2\pi\frac{f_o}{f_s}$

$$R_{x_s}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{x_s}(e^{j\theta})e^{jn\theta}d\theta = \frac{f_s}{2\pi}\int_{-\theta_o}^{\theta_o} e^{jn\theta}d\theta$$

$$= \frac{f_s}{2\pi}\left.\frac{e^{jn\theta}}{jn}\right|_{-\theta_o}^{\theta_o} = f_s\frac{e^{jn\theta_o}-e^{-jn\theta_o}}{j2\pi n} = f_s\frac{\sin(\theta_o n)}{\pi n}$$

(d) $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta})$

(e)

$$R_y[n] = \mathbb{E}\{y[m]y[m+n]\} =$$
$$\mathbb{E}\{(x_s[m] - ax_s[m-1])(x_s[m+n] - ax_s[m+n-1])\} =$$
$$\mathbb{E}\{x_s[m]x_s[m+n]\} - a\mathbb{E}\{x_s[m-1]x_s[m+n]\} -$$
$$-a\mathbb{E}\{x_s[m]x_s[m+n-1]\} + a^2\mathbb{E}\{x_s[m-1]x_s[m+n-1]\}$$
$$= (1+a^2)R_{x_s}[n] - a(R_{x_s}[n+1]) + R_{x_s}[n-1])$$
$$R_y[n] = (1+a^2)f_s\frac{\sin(\theta_o n)}{\pi n} - a\, f_s\left(\frac{\sin(\theta_o(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{\sin(\theta_o(n-1))}{\pi(n-1)}\right)$$

(f) $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ con lo que $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$ y tiene la misma forma que la densidad espectral de potencia con que trabajamos en la parte 3. Si repetimos la cuentas obtenemos:

$$R_y[n] = f_s\frac{\sin\left(\frac{\theta_o}{2}n\right)}{\pi n}$$