Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

30 de julio de 2004

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Demostrar el teorema del muestreo.

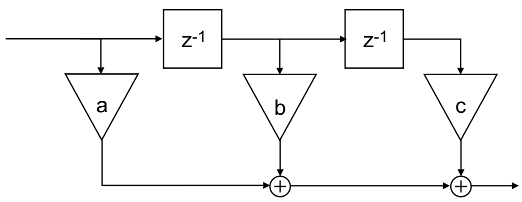
(b) Sea $x_c(t) = \cos(3400\cdot 2\pi t) + 3\cos(69900\cdot 2\pi t)$ una señal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 7000\,\text{Hz}$. $y_c(t)$ es la reconstrucción ideal de $x[n]$. Hallar $y_c(t)$.

Problema 1

Al filtro digital *real* de la figura se aplicará la señal $x[n]$ que llega contaminada con $\eta[n]$, ruido blanco aditivo de potencia σ_η^2, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \left(\delta[n] + \frac{\delta[n-1] + \delta[n+1]}{2} \right) \qquad \sigma_x^2 = \sigma_\eta^2$$

El objetivo del filtro es recuperar la señal x.



(a) Hallar condiciones en los parámetros a, b y c del filtro para que este *no* presente distorsión de fase. Hallar la respuesta en frecuencia y el retardo de grupo del filtro.

(b) Cumpliendo las condiciones de la parte anterior, hallar los coeficientes del filtro para que la salida sea lo más similar posible a las señal original $x[n]$ tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido:

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\{(y[n] - x[n - T_G])^2\}$$

donde $y[n]$ es la salida del filtro a la entrada $x[n] + \eta[n]$ y T_G es el retardo de grupo.

(c) Dar un modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto flotante* y se *redondea*. Justificar.

(d) Calcular la potencia de "ruido de operaciones" a la salida del filtro con coeficientes a, b y c genéricos para una entrada de media nula y características de ruido blanco. Se utiliza la misma representación numérica que en la parte anterior. Se deben fundamentar correctamente todos los pasos.

Problema 2

En este problema se estudiará el efecto de muestrear en intervalos no regulares.

(a) Sea $x_c(t)$ una señal de ancho de banda $1/2T$ y $x_1[n] = x_c(nT)$. Encontrar el espectro de $x_1[n]$ en función de $X_c(f)$, espectro de $x_c(t)$. Bosquejar módulo y fase en el caso $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

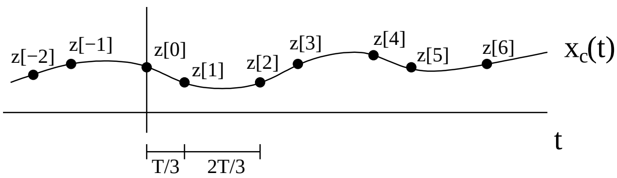
(b) Sea $x_2[n] = x_c(nT + T/3)$. Encontrar el espectro de $x_2[n]$. Bosquejar módulo y fase en el caso $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

(c) Sea $w[n]$ una secuencia con espectro $W(e^{j\theta})$. Encontrar, en función de $W(e^{j\theta})$, el espectro de $\hat{w}[n]$ definida por

$$w[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow \hat{w}[n] \qquad \text{o sea} \qquad \hat{w}[n] = \begin{cases} w[i] & n = 2i \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

(d) Encontrar el espectro de $\hat{x}_1[n]$ y $\hat{x}_2[n]$, resultado de aplicar la operación de la parte anterior a $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente. Bosquejar módulo y fase en el caso que $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

(e) Sea $z[n]$ el resultado de muestrear $x_c(t)$ con intervalos alternados de $T/3$ y $2T/3$, como muestra la figura.



Encontrar el espectro de $z[n]$.
Sugerencia: verificar que $z[n] = \hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n-1]$.

(f) ¿Se puede recuperar $x_c(t)$ de $z[n]$ de alguna forma? Justificar.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) A partir de los resultados intermedios del teorema del muestreo, se ve que los componentes que quedan entre $\pm f_s/2$ son: $\pm 3400\,\mathrm{Hz}$ y $\pm(69900\,\mathrm{Hz} - 10 \cdot f_s) = \pm 100\,\mathrm{Hz}$. Por lo tanto la salida será $y_c(t) = 3\cos(100 \cdot 2\pi t) + \cos(3400 \cdot 2\pi t)$.

Problema 1

(a)

$$H(e^{j\theta}) = a + be^{-j\theta} + ce^{-2j\theta}$$
$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(ae^{j\theta} + b + ce^{-j\theta}\right)$$

Si $a = c$,

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(2a\cos\theta + b\right)$$

donde $(2a\cos\theta + b)$ es real. Si no cambia de signo, entonces la fase es lineal, y esto se cumple si $b \geq 2|a|$. El retardo de grupo es el coeficiente de la exponencial compleja, por lo tanto es 1 muestra.

(b) Debemos minimizar

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\left\{(y[n] - x[n - T_G])^2\right\}$$
$$= \mathbf{E}\left\{ \left(ax[n] + a\eta[n] + bx[n-1] + b\eta[n-1] + ax[n-2] + a\eta[n-2] - x[n-1]\right)^2 \right\}$$

Como η no está correlacionado con x y tiene media luna, $R_x[0] = \sigma_x^2$, $R_x[1] = \sigma_x^2/2$, $R_x[2] = 0$ y $R_\eta[n] = \sigma_x^2\delta[n]$,

$$\varepsilon^2 = \sigma_x^2\left(4a^2 + 2b^2 - 2a - 2b + 2ab + 1\right).$$

Debemos ahora encontrar los valores de a y b que lo minimizan con la condición $b \geq 2|a|$. Derivando con respecto a estos parámetros, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial a} = \sigma_x^2(8a - 2 + 2b) = 0$$
$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial b} = \sigma_x^2(4b - 2 + 2a) = 0$$

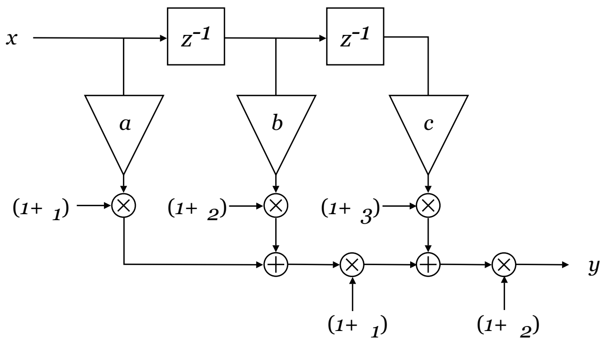
con solución $a = \frac{1}{7}$ y $b = \frac{3}{7}$ (que cumple la relación). Debemos verificar que es un mínimo, lo cual se hace calculando el Hessiano y verificando que los valores propios son positivos.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial a\partial b} \\ \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial b\partial a} & \frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

con valores propios 10 y 2.

(c) Ver teórico.

(d) Aplicando el modelo de "ruido de operaciones" al sistema obtenemos



$y[n] = ax[n](1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) + bx[n-1](1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_2) + cx[n-2](1+\eta_2)(1+\varepsilon_3)$
y el error es

$$y_n[n] = ax[n]\big[(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) - 1\big] + bx[n-1]\big[(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_2) - 1\big] +$$
$$+cx[n-2]\big[(1+\eta_2)(1+\varepsilon_3) - 1\big].$$

La potencia del error es $\sigma_n^2 = \mathbf{E}\{y_n^2\}$, y, como x es ruido blanco de media nula, no aparecen términos cruzados. Como los ruidos introducidos son independientes entre sí y de la señal x, podemos separar los valores esperados:

$$\sigma_n^2 = \sigma_x^2\Big[a^2\mathbf{E}\big\{((1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) - 1)^2\big\} + b^2\mathbf{E}\big\{((1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) - 1)^2\big\} +$$
$$+c^2\mathbf{E}\big\{((1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\varepsilon_1) - 1)^2\big\}\Big].$$

Como los términos η_i y ε_i son independientes y de media nula, los términos cruzados entre ellos se anulan. Además, despreciamos los términos de segundo y tercer orden, de forma $(\sigma_n^2)^2$ y $(\sigma_n^2)^3$. El resultado final es

$$\sigma_n^2 \approx \sigma_x^2\sigma_n^2[3(a^2+b^2)^2 + 2c^2].$$

Problema 2

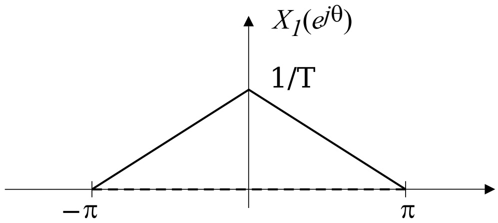
(a) Del curso sabemos que al muestrear una señal con frecuencia $1/T$, el espectro que obtenemos es

$$X_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right).$$

Es conveniente usar la siguiente notación más compacta,

$$X_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}X_c\left(\frac{\theta}{2\pi T}\right) \qquad |\theta| \le \pi$$

donde está implícito que $X_1(e^{j\theta})$ es periódica de período 2π y que no hay solapamiento.



(b) Conviene escribir $x_2[n]$ como

$$x_2[n] = x_c'(nT) \qquad \text{donde} \qquad x_c'(t) = x_c(t + T/3)$$

y aplicando lo mismo que antes obtenemos

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c'\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right).$$

De las propiedades básicas de la transformada de Fourier se obtiene que

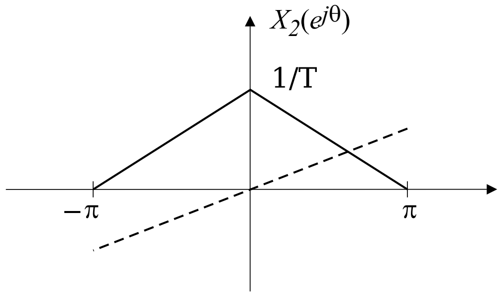
$$X_c'(f) = X_c(f)e^{j2\pi fT/3}.$$

El resultado final es

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)e^{j\frac{\theta - k2\pi}{3}}.$$

En la notación compacta,

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}X_c\left(\frac{\theta}{2\pi T}\right)e^{j\theta/3} \qquad |\theta| \le \pi.$$



(c)

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_k \hat{w}[k]e^{-jk\theta}$$

Los únicos términos no nulos son aquellos en que k es múltiplo de 2. Por lo tanto podemos escribir,

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_i \hat{w}[2i]e^{-j2i\theta}$$

y aplicando la definición de $\hat{w}[n]$ obtenemos

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_i w[i]e^{-j2i\theta}.$$

Esta última expresión es idéntica a la definición de $W(e^{j\theta})$ pero evaluada en 2θ. Por lo tanto,

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = W(e^{j2\theta}).$$

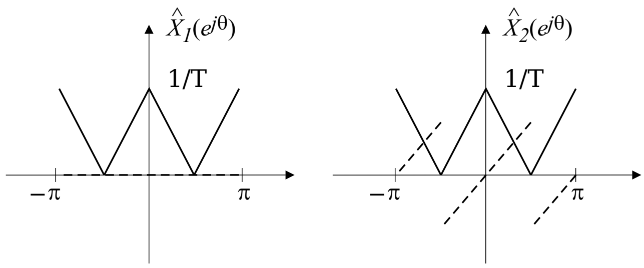
No debemos olvidar que $W(e^{j\theta})$ es periódica de período 2π. En un período de $\hat{W}(e^{j\theta})$ tendremos entonces 2 períodos de $W(e^{j\theta})$.

(d) Aplicando lo anterior,

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = X_1(e^{j2\theta}) \qquad \hat{X}_2(e^{j\theta}) = X_2(e^{j2\theta}).$$

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{2\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)$$

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{2\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)e^{j\frac{2\theta - 2\pi k}{3}}.$$



(e) Revisando cuidadosamente las expresiones obtenemos

$$\hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n-1] = \begin{cases} x_c(iT) & n = 2i \\ x_c(iT + T/3) & n = 2i+1 \end{cases}$$

que corresponde con $z[n]$, el muestreo de $x_c(t)$ en la forma que queremos analizar.

Para encontrar el espectro final resta ver que el espectro de $\hat{x}_2[n-1]$ es $\hat{X}_2(e^{j\theta})e^{-j\theta}$, que se obtiene de las propiedades de la DTFT. Finalmente, aplicando la linealidad de DTFT

$$Z(e^{j\theta}) = \hat{X}_1(e^{j\theta}) + \hat{X}_2(e^{j\theta})e^{-j\theta}.$$

Sustituyendo todo obtenemos,

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{2\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)(1 + e^{-j\frac{\theta+2\pi k}{3}}).$$

(f) Sí. Usando un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $\pi/2$ y un filtro de respuesta frecuencial $(1+e^{-j\frac{\theta+2\pi k}{3}})^{-1}$ obtenemos la secuencia que resultaría de un muestreo normal, a menos de una constante. Como la señal original cumple el teorema del muestreo se puede recuperar usando un reconstructor ideal.

Por otro lado, es claro que debe ser posible pues $x_1[n]$ y $x_2[n]$ cumplen cada una el teorema de muestreo y por lo tanto la señal se podría reconstruir a partir de cualquiera de ellas individualmente.