Muestreo y procesamiento digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de diciembre de 2003

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Demostrar el teorema del muestreo.

(b) Sea $x_c(t) = \cos(1700 \cdot 2\pi t) + 3\cos(34950 \cdot 2\pi t)$ una señal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 3500\,\text{Hz}$. $y_c(t)$ es la reconstrucción ideal de $x[n]$. Hallar $y_c(t)$.

Problema 1

Sea $x_c(t)$ un proceso estocástico en tiempo continuo, estacionario en sentido amplio. Este proceso se muestrea a una tasa de T segundo por muestras, para obtener el proceso estocástico discreto $x[n] = x_c(nT)$.

(a) Probar que el proceso discreto es *estacionario en sentido amplio.*

(b) Si $h_d[n]$ es un SLIT estable y $x[n]$ es su entrada, probar que la salida es *estacionaria en sentido amplio.* Expresar la autocorrelación del proceso de salida en función de la autocorrelación del proceso de entrada y de $h_d[n]$.

(c) Si $G_{x_c}(f) = A^2\,\Lambda(f/f_0)$, hallar el mínimo T para el cual el proceso discreto $x[n]$ es *blanco.* Hallar su **potencia** P_x.

De ahora en más el filtro $h_d[n]$ tiene respuesta frecuencial dada por $H_d(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(1 - a\,e^{-j\theta}\right)^{-1}$ donde $0 < a < 1$.

(d) Si $y[n]$ es la respuesta de este filtro a la entrada $x[n]$, para T *en las condiciones de la parte anterior*; hallar explícitamente la **potencia** P_y del proceso de salida $y[n]$.

(e) Bosqueje la *Densidad Espectral de Potencia*, $G_y(e^{j\theta})$ del proceso $y[n]$.

(f) Hallar explícitamente $R_y[n]$ la *autocorrelación* del proceso $y[n]$, a partir de los resultados de la parte (b).

Problema 2

En este problema se estudiará el efecto de muestrear en intervalos no regulares.

(a) Sea $x_c(t)$ una señal de ancho de banda $1/2T$ y $x_1[n] = x_c(nT)$. Encontrar el espectro de $x_1[n]$ en función de $X_c(f)$, espectro de $x_c(t)$. Bosquejar módulo y fase en el caso $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

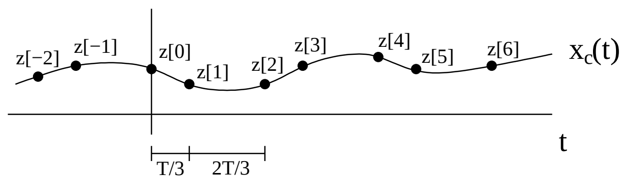
(b) Sea $x_2[n] = x_c(nT + T/3)$. Encontrar el espectro de $x_2[n]$. Bosquejar módulo y fase en el caso $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

(c) Sea $w[n]$ una secuencia con espectro $W(e^{j\theta})$. Encontrar, en función de $W(e^{j\theta})$, el espectro de $\hat{w}[n]$ definida por

$$w[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow \hat{w}[n] \qquad \text{o sea} \qquad \hat{w}[n] = \begin{cases} w[i] & n = 2i \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

(d) Encontrar el espectro de $\hat{x}_1[n]$ y $\hat{x}_2[n]$, resultado de aplicar la operación de la parte anterior a $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente. Bosquejar módulo y fase en el caso que $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

(e) Sea $z[n]$ el resultado de muestrear $x_c(t)$ con intervalos alternados de $T/3$ y $2T/3$, como muestra la figura.



Encontrar el espectro de $z[n]$.
Sugerencia: verificar que $z[n] = \hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n-1]$.

(f) ¿Se puede recuperar $x_c(t)$ de $z[n]$ de alguna forma? Justificar.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) A partir de los resultados intermedios del teorema del muestreo, se ve que los componentes que quedan entre $\pm f_s/2$ son: $\pm 1700\,\mathrm{Hz}$ y $\pm(34950\,\mathrm{Hz} - 10 \cdot f_s) = \pm 50\,\mathrm{Hz}$. Por lo tanto la salida será $y_c(t) = 3\cos(50 \cdot 2\pi t) + \cos(1700 \cdot 2\pi t)$.

Problema 1

(a) Hay que probar que $E\{x[n]\}$ y $E\{x[n]x[n+m]\}$ son independientes de n. Pero

$$E\{x[n]\} = E\{x_c(nT)\} = m_{x_c}$$

$$E\{x[n]x[n+m]\} = E\{x_c(nT)x_c((n+m)T)\} = R_{x_c}(mT)$$

son independientes de n por ser x_c estacionario en sentido amplio.

(b)

$$E\{y[n]\} = E\left\{\sum_k h_d[k]x[n-k]\right\} = \sum_k h_d[k]E\{x[n-k]\} = m_x \sum_k h_d[k]$$

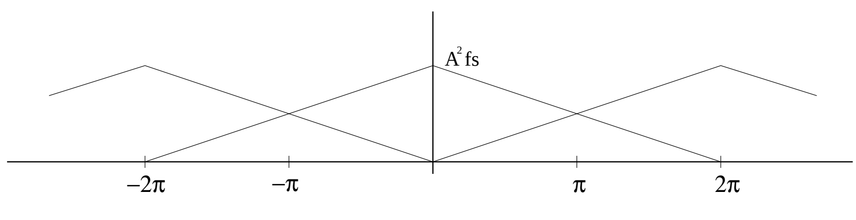
$$E\{y[n]y[n+m]\} = E\left\{\sum_k h_d[k]x[n-k]\sum_j h_d[j]x[n+m-j]\right\} =$$

$$= \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]E\{x[n-k]x[n+m-j]\} = \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]R_x[m+k-j]$$

Ambas expresiones son independientes de n, lo que muestra que la salida $y[n]$ es estacionaria en sentido amplio. La autocorrelación en la salida es

$$R_y[m] = \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]R_x[m+k-j]$$

(c) La frecuencia de muestreo mínima para que el proceso discreto $x[n]$ sea blanco es aquella en que hay solapamiento de tal forma que la densidad espectral de pontencia de x es



Para esto $f_s = f_o$, por lo que

$$T_{\min} = \frac{1}{f_o}$$

La densidad espectral de potencia y potencia resultante es

$$G_x(e^{j\theta}) = A^2 f_o \qquad\qquad P_x = A^2 f_o$$

(d) En estas condiciones $G_x(e^{j\theta}) = A^2 f_o$ y por lo tanto

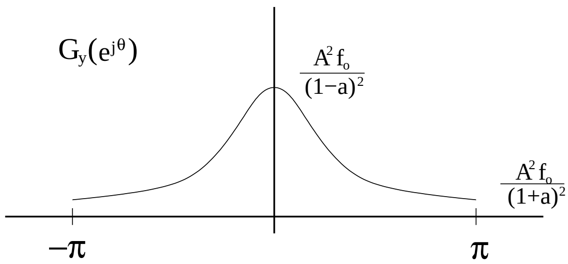
$$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\theta})|^2 A^2 f_o \, d\theta = A^2 f_o \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

Se puede ver facilmente que $h_d[n] = a^{n-1}u[n-1]$ y utilizando el teorema de Parseval podemos escribir

$$P_y = A^2 f_o \sum_k \left| a^{k-1} u[k-1] \right|^2 = \frac{A^2 f_o}{1-a^2}$$

(e)

$$G_y(e^{j\theta}) = |H_d(e^{j\theta})|^2 G_x(e^{j\theta}) = \frac{A^2 f_o}{|1 - a e^{-j\theta}|^2}$$



(f) Por el resultado de la parte (b),

$$R_y[m] = \sum_k \sum_j h_d[k] h_d[j] R_x[m+k-j] = A^2 f_o \sum_k \sum_j h_d[k] h_d[j] \delta[m+k-j]$$

$$R_y[m] = A^2 f_o \sum_k h_d[k] h_d[m+k]$$

Miramos ahora cuando $m \geq 0$, el otro lado es simétrico.

$$R_y[m] = A^2 f_o \sum_{k=0}^{+\infty} a^k a^{k+m} = \frac{A^2 f_o}{1-a^2} a^m \quad m \geq 0$$

La expresión completa es

$$R_y[m] = \frac{A^2 f_o}{1-a^2} a^{|m|}$$

Problema 2

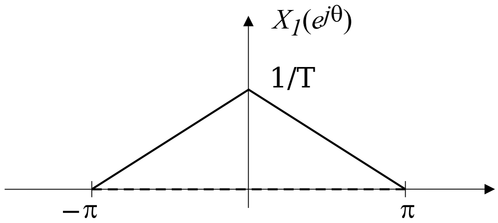
(a) Del curso sabemos que al muestrear una señal con frecuencia $1/T$, el espectro que obtenemos es

$$X_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right).$$

Es conveniente usar la siguiente notación más compacata,

$$X_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}X_c\left(\frac{\theta}{2\pi T}\right) \qquad |\theta| \leq \pi$$

donde está implícito que $X_1(e^{j\theta})$ es periódica de período 2π y que no hay solapamiento.



(b) Conviene escribir $x_2[n]$ como

$$x_2[n] = x_c'(nT) \qquad \text{donde} \qquad x_c'(t) = x_c(t + T/3)$$

y aplicando lo mismo que antes obtenemos

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c'\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right).$$

De las propiedades básicas de la transformada de Fourier se obtiene que

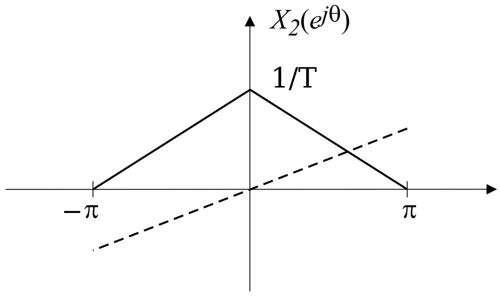
$$X_c'(f) = X_c(f)e^{j2\pi fT/3}.$$

El resultado final es

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)e^{j\frac{\theta - k2\pi}{3}}.$$

En la notación compacta,

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}X_c\left(\frac{\theta}{2\pi T}\right)e^{j\theta/3} \qquad |\theta| \leq \pi.$$



(c)

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_k \hat{w}[k]e^{-jk\theta}$$

Los únicos terminos no nulos son aquellos en que k es multiplo de 2. Por lo tanto podemos escribir,

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_i \hat{w}[2i]e^{-j2i\theta}$$

y aplicando la definición de $\hat{w}[n]$ obtenemos

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_i w[i]e^{-j2i\theta}.$$

Esta última expresión es identica a la la definición de $W(e^{j\theta})$ pero evaluada en 2θ. Por lo tanto,

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = W(e^{j2\theta}).$$

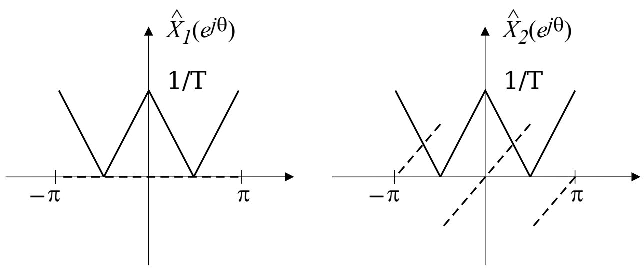
No debemos olvidar que $W(e^{j\theta})$ es periódica de período 2π. En un período de $\hat{W}(e^{j\theta})$ tendremos entonces 2 períodos de $W(e^{j\theta})$.

(d) Aplicando lo anterior,

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = X_1(e^{j2\theta}) \qquad \hat{X}_2(e^{j\theta}) = X_2(e^{j2\theta}).$$

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{2\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)$$

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{2\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)e^{j\frac{2\theta - 2\pi k}{3}}.$$



(e) Revisando cuidadosamente las expresiones obtenemos

$$\hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n-1] = \begin{cases} x_c(iT) & n = 2i \\ x_c(iT + T/3) & n = 2i + 1 \end{cases}$$

que corresponde con $z[n]$, el muestreo de $x_c(t)$ en la forma que queremos analizar.

Para encontrar el espectro final resta ver que el espectro de $\hat{x}_2[n-1]$ es $\hat{X}_2(e^{j\theta})e^{-j\theta}$, que se obtiene de las propiedades de la DTFT. Finalmente, aplicando la linealidad de DTFT

$$Z(e^{j\theta}) = \hat{X}_1(e^{j\theta}) + \hat{X}_2(e^{j\theta})e^{-j\theta}.$$

Sustituyendo todo obtenemos,

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{2\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)(1 + e^{-j\frac{\theta + 2\pi k}{3}}).$$

(f) Sí. Usando un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $\pi/2$ y un filtro de respuesta frecuencial $(1 + e^{-j\frac{\theta+2\pi k}{3}})^{-1}$ obtenemos la secuencia que resultaría de un muestreo normal, a menos de una constante. Como la señal original cumple el teorema del muestreo se puede recuperar usando un reconstructor ideal.

Por otro lado, es claro que debe ser posible pues $x_1[n]$ y $x_2[n]$ cumplen cada una el teorema de muestreo y por lo tanto la señal se podría reconstruir a partir de cualquiera de ellas individualmente.