Muestreo y Procesamiento Digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

15 de agosto de 2003

Indicaciones:

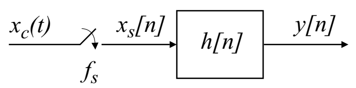
- El examen tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

1. Enunciar el teorema del muestreo.
2. Demostrar el teorema del muestreo.
3. Sea $x_c(t) = \cos(17000 \cdot 2\pi t)$ una sinusoidal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 12500\,\text{Hz}$. $y_c(t)$ es la reconstrucción ideal de $x[n]$. Hallar $y_c(t)$.

Problema 1

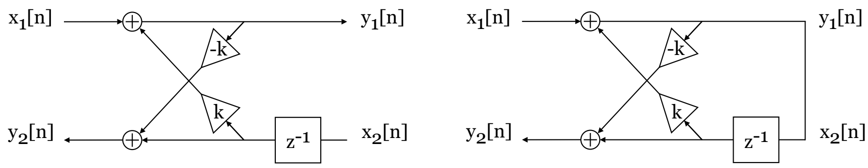
Sean $x_s[n]$ una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo $x_c(t)$, muestreado con una frecuencia $f_s = 1/T_s$. Las muestras $x_s[n]$ son filtradas con un filtro discreto de respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$.



1. Hallar una expresión para la autocorrelación de x_s, $R_{x_s}[n]$, en función de la autocorrelación de $x_c(t)$, $R_{x_c}(\tau)$
2. Sea $G_{x_c}(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$ la densidad espectral de $x_c(t)$. Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de $x_s[n]$, $G_{x_s}(e^{j\theta})$. Bosquejar $G_{x_s}(e^{j\theta})$ indicando las características (altura, frecuencias particulares, etc.)
3. Hallar $R_{x_s}[n]$, en las condiciones de la parte 2
4. Dar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal de salida del filtro, $y[n]$, $G_y(e^{j\theta})$.
5. Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro es el definido por la ecuación de recurrencia: $y[n] = x_s[n] - a\,x_s[n-1]$.
6. Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro tiene transferencia $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$, con $\theta_0 f_s = \omega_0$.

Problema 2

El sistema A de la figura tiene dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, y dos salidas $y_1[n]$ y $y_2[n]$. Si se conecta $y_1[n]$ a $x_2[n]$ se obtiene el sistema B.



Sistema A Sistema B

1. Hallar las dos ecuaciones en diferencias que relacionan las dos salidas con las entradas del sistema A.
2. Calcular la función de transferencia $H_{11}(z) = Y_1(z)/X_1(z)$ del sistema B. Determinar el rango de valores de k para que el sistema sea estable.
3. Calcular la función de transferencia $H_{21}(z) = Y_2(z)/X_1(z)$ del sistema B. Calcular el módulo de la respuesta frecuencial del sistema: $|H_{21}(e^{j\theta})|$. Bosquejar este módulo.
4. Dar el modelo de errores en operaciones del sistema B cuando se relizan las operaciones en punto fijo.
5. Calcular la potencia de ruido en la salida y_2 debida a errores en las operaciones.

Solución

Pregunta

Parte 1

Ver teórico.

Parte 2

Ver teórico.

Parte 3

A partir de los resultados intermedios del teorema del muestreo, se ve claramente que entre $\pm f_s/2$ sólo quedarán componentes en $\pm(17000 - 12500) = \pm 4500\,\text{Hz}$. Por lo tanto la salida será $y_c(t) = \cos(4500 \cdot 2\pi t)$.

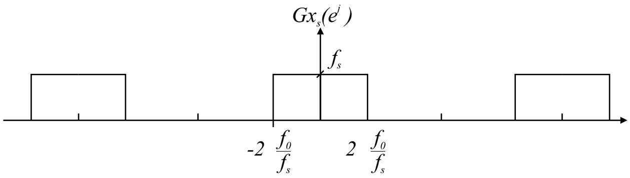
Problema 1

Parte 1

$R_{x_s}[n] = E\{x_s[m]x_s[m+n]\} = E\{x_c(mT_s)x_c((m+n)T_s)\} = R_{x_c}(nT_s)$

Parte 2

$R_{x_c}(\tau)$ es una señal de banda acotada en f_o ($w_o = 2\pi f_o$). Según el teorema de muestreo, para no tener solapamiento debemos utilizar una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_o$.



Parte 3

$G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ donde $\theta_o = 2\pi\frac{f_o}{f_s}$

$$R_{x_s}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{x_s}(e^{j\theta})e^{jn\theta}d\theta = \frac{f_s}{2\pi}\int_{-\theta_o}^{\theta_o} e^{jn\theta}d\theta$$

$$= \frac{f_s}{2\pi}\left.\frac{e^{jn\theta}}{jn}\right|_{-\theta_o}^{\theta_o} = f_s\frac{e^{jn\theta_o} - e^{-jn\theta_o}}{j2\pi n} = f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n}$$

Parte 4

$G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta})$

Parte 5

$$R_y[n] = E\{y[m]y[m+n]\} =$$
$$E\{(x_s[m] - ax_s[m-1])(x_s[m+n] - ax_s[m+n-1])\} =$$
$$E\{x_s[m]x_s[m+n]\} - aE\{x_s[m-1]x_s[m+n]\} -$$
$$-aE\{x_s[m]x_s[m+n-1]\} + a^2E\{x_s[m-1]x_s[m+n-1]\}$$
$$= (1+a^2)R_{x_s}[n] - a(R_{x_s}[n+1]) + R_{x_s}[n-1])$$
$$R_y[n] = (1+a^2)f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n} - a\, f_s\left(\frac{sen(\theta_o(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{sen(\theta_o(n-1))}{\pi(n-1)}\right)$$

Parte 6

$G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ con lo que $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$ y tiene la misma forma que la densidad espectral de potencia con que trabajamos en la parte 3. Si repetimos la cuentas obtenemos:

$$R_y[n] = f_s\frac{sen\left(\frac{\theta_o}{2}n\right)}{\pi n}$$

Problema 2

Parte 1

$$y_1[n] = x_1[n] + kx_2[n-1]$$
$$y_2[n] = (1-k^2)x_2[n-1] - kx_1[n]$$

Parte 2

Transformando las ecuaciones de recurrencia y sustituyendo se obtiene $H_{11}(z) = \frac{1}{1-kz^{-1}}$. Este sistema tiene un polo en $z = k$, por lo tanto será estable para $|k| < 1$.

Parte 3

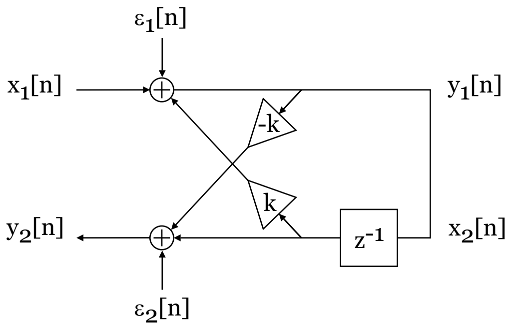
Igualando $Y_1 = X_2$ se llega a $H_{21}(z) = \frac{1-kz}{z-k}$. Operando,

$$|H_{21}(e^{j\theta})|^2 = \frac{1 - 2k\cos\theta + k^2}{1 - 2k\cos\theta + k^2} = 1$$

El bosquejo es trivial.

Parte 4

Se introducen únicamente errores en los dos productos, que se modelan como una señal blanca independiente aditiva a la salida de los multiplicadores.



Parte 5

El error 1 pasa por el filtro $|H_{21}(e^{j\theta})| = 1$, el error 2 entra directamente a la salida y ambos procesos son independientes entre sí. Entonces, la densidad de potencia a la salida debido a errores en operaciones es

$$G_n(e^{j\theta}) = \sigma_{e_1}^2 |H_{21}(e^{j\theta})|^2 + \sigma_{e_2}^2.$$

Como $|H_{21}(e^{j\theta})| = 1$, y $\sigma_{e_1}^2 = \sigma_{e_2}^2 = \sigma_e^2$,

$$\sigma_n^2 = 2\sigma_e^2$$