Muestreo y Procesamiento Digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

1ro. de agosto de 2002

Indicaciones:

- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada ejercicio o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. En la primer hoja de cada ejercicio o pregunta se deberá indicar el número de hojas que corresponden a ese ejercicio o pregunta.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Pregunta

Sea $x[n]$ un proceso estacionario con autocorrelación $R_x[n]$ y densidad espectral de potencia $G_x(e^{j\theta})$.

$x[n]$ es la entrada al filtro estable $H(e^{j\theta})$, y la salida es $y[n]$.

Obtener la densidad espectral de $y[n]$, indicando y justificando todos los pasos.

Ejercicio 1

Parte 1

Se considera una señal $x_d[n]$ obtenida de muestrear la señal de tiempo continuo $x_c(t)$ en múltiplos enteros de $2T$. Será entonces $x_d[n] = x_c(2nT)$. La señal $x_c(t)$ cumple las condiciones del teorema de muestreo a esa frecuencia.

El objetivo de esta parte es hallar la señal de tiempo discreto $y_d[n]$ que se obtendría de muestrear $x_c(t)$ en los instantes de tiempo $t = (2n-1)T$, es decir:

$$y_d[n] = x_c((2n-1)T).$$

Hallar la respuesta en frecuencia del filtro $H(e^{j\theta})$ de forma que cuando la señal de entrada sea $x_d[n]$, la señal de salida sea $y_d[n]$. Justifique.

Solución: Al ser $x_d[n] = x_c(2nT)$ entonces, aplicando reconstrucción ideal,

$$x_c(t) = \sum_k \text{sinc}\left(\frac{t - 2kT}{2T}\right) x_d[k].$$

$y_d[n] = x_c((2n-1)T)$, por lo tanto

$$y_d[n] = \sum_k \text{sinc}\left((n - 1/2) - k\right) x_d[k].$$

El filtro que realiza esta operación es entonces:

$$h[n] = \text{sinc}\left(n - 1/2\right).$$

La transformada de Fourier de $h[n]$ es $H(e^{j\theta}) = e^{-j\frac{\theta}{2}}$.

Parte 2

Se desea realizar un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte $f_0 =$ 1kHz para señales en tiempo continuo arbitrarias.

Para ello, se dispone de un sistema de procesamiento digital que consiste en un muestreador, un filtro digital FIR con coeficientes $h[n]$, y un reconstructor ideal. Todo el sistema funciona con frecuencia de muestreo $f_s = 10$kHz.

1. Dar un diagrama del sistema completo a utilizar, indicando las características de los módulos que se agreguen.

   Solución: El sistema consiste en un filtro pasabajos seguido del sistema muestreador / procesador / reconstructor. El pasabajos no debe dejar pasar ningún componente por encima de 5kHz, pero puede comenzar a atenuar a partir de 1kHz, ya que nuestro procesamiento justamente consiste en eliminar las componentes por encima de 1kHz. En principio podríamos dejar pasar componentes hasta 9kHz, pero como el filtro digital no va a ser ideal, para evitar solapamiento debemos eliminar todo componente por encima de 5kHz.

2. Calcular los coeficientes del filtro digital $h[n]$.

   Solución: Un pasabajos ideal con frecuencia de corte $f_s/10$ tiene la respuesta impulsiva $h[n] = 0{,}2\text{sinc}(n/5)$.

3. En el sistema sólo se pueden almacenar 25 coeficientes, por lo cual el filtro deberá ser aproximado. Interesa que el filtro resultante sea de fase lineal y sin oscilaciones en la curva de la respuesta frecuencial. Dejar expresado el valor a asignar a cada coeficiente del filtro FIR en función de los coeficientes de la ventana seleccionada. Justificar la elección de la ventana.

Solución: Para que el filtro resultante sea de fase lineal, se debe retrasar la respuesta impulsiva 12 muestras para que ésta quede centrada en la ventana de coeficientes. De esta manera se obtiene un filtro de fase lineal de tipo I (respuesta simétrica alrededor de $n = 12$). Una buena ventana a elegir sería la de Hamming. La ventana rectangular dejaría muchas oscilaciones de Gibbs en la respuesta frecuencial, a pesar de ser la ventana que resultaría en la caída más abrupta en la frecuencia de corte. Hamming es una ventana de mayor orden (caída menos abrupta), pero elimina casi completamente las oscilaciones de Gibbs (el lóbulo secundario de esta ventana es muy pequeño). Se podría utilizar una ventana de orden aún mayor (Blackman), pero se perdería aún más la pendiente en la frecuencia de corte. El uso de ventana de Hann en vez de Hamming produciría resultados similares, y habría que determinar cuál se adapta más a la aplicación particular.

En definitiva quedarían los coeficientes: $h'[n] = h[n-12]w[n]$, con n variando entre 0 y 24.

Ejercicio 2

Se consideran dos filtros digitales g y h que verifican las ecuaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} g[n]: \quad y[n] &= \frac{x[n]+x[n-1]+\cdots+x[n-N+1]}{N} \\ h[n]: \quad y[n] &= \frac{x[n]+(N-1)y[n-1]}{N} \end{aligned}$$

1. Calcular la respuesta al impulso y frecuencial para estos filtros. Indicar y justificar si son causales, estables, de respuesta al impulso finita o infinita.

   Solución: $g[n] = \frac{1}{N}$ para $N \in \{0 \ldots N-1\}$. g es sumable absolutamente, por lo tanto corresponde a un filtro estable. Es causal por construcción (no aparecen términos posteriores a n). La respuesta impulsiva es finita al ser no recursivo.

   La respuesta frecuencial es $G(e^{j\theta}) = \frac{1-e^{-jN\theta}}{1-e^{-j\theta}}$ que es igual a $e^{j\frac{N-1}{2}\theta}\frac{\sin(\frac{N}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

   $h[n] = \frac{1}{N}u[n]\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$. Como $\|\frac{N-1}{N}\| < 1$, el polo se encuentra dentro del círculo unidad, y el filtro es entonces estable. Es causal por construcción. La respuesta impulsiva es infinita.

   La respuesta frecuencial es $H(e^{j\theta}) = \frac{1}{N-(N-1)e^{-j\theta}}$.

2. Para $N = 4$, graficar el módulo de la respuesta frecuencial (indicar y evaluar puntos notables).

3. Como entrada a los filtros se considera un proceso $x[n]$ estacionario. Hallar en cada caso la secuencia $v[n]$ que cumpla la siguiente relación: $R_y[n] = v[n] * R_x[n]$.

Solución: Se sabe que $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_x(e^{j\theta})$. Por lo tanto, $v[n]$ será la antitransformada de $|H(e^{j\theta})|^2$. Entonces, $v[n] = \mathcal{F}^{-1}\left[H(e^{j\theta})\overline{H(e^{j\theta})}\right] = h[n] * h[-n]$.

Entonces, $v_g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k]g[-n+k] = \frac{1}{N^2}\sum_{k=n}^{N-1} 1$. Esto da $\frac{N-n}{N^2}$ para $0 \leq n < N$ y 0 afuera de ese intervalo.

En el otro caso, $v_h[n] = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^k \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-n} \cdots = \frac{\left(\frac{N-1}{N}\right)^n}{N^2\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^2\right)}$.

4. Si la entrada es un proceso blanco, de media nula, y potencia σ^2, calcular la potencia y graficar la densidad espectral de la salida de los filtros g y h.

   Solución: Aplicando el resultado anterior, interesa saber $R_y[0] = \sum_k v[-k]R_x[k]$. Como x es un proceso blanco, será entonces $R_y[0] = \sigma^2 v[0]$.

   Para el filtro g, el resultado es σ^2/N. Para el filtro h, da $\sigma^2/(2N-1)$.