Muestreo y Procesamiento Digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

1 de marzo de 2002

__Indicaciones__:

- El examen tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones

Pregunta

Sea $x[n]$ un proceso estacionario con autocorrelación $R_x[n]$ y densidad espectral de potencia $G_x(e^{j\theta})$; $H(e^{j\theta})$ un filtro estable; e $y[n]$ el proceso x filtrado por H. Probar que la densidad espectral de potencia de y, $G_y(e^{j\theta})$, viene dada por la siguiente expresión:

$$G_y(e^{j\theta}) = G_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2$$

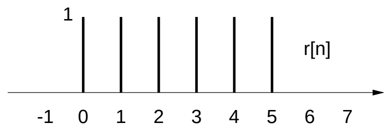
Problema 1

Se pretende detectar transiciones (bordes) en una señal $x(t)$. Esta señal tiene ancho de banda W, y se le toman muestras $x[n]$ a frecuencia $f_s > 2W$.

Se propone como detector de bordes al siguiente filtro digital:

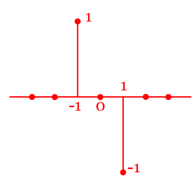
$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$

1. Hallar y graficar la respuesta al impulso, al escalón ($u[n]$), y a la señal $r[n]$ que se muestra en la figura. ¿Por qué es un *detector de transiciones*?



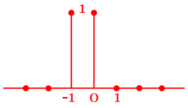
Solución: La respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$



La respuesta al escalón es:

$$y_e[n] = -u[n-1] + u[n+1] = \delta[n+1] + \delta[n]$$

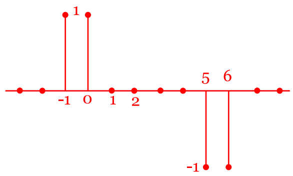


La respuesta a $r[n]$ es:

$$r[n] = u[n] - u[n-6]$$

Entonces,

$$y_r[n] = y_e[n] - y_e[n-6] = \delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-5] - \delta[n-6]$$



Es un detector de bordes porque a la salida, la amplitud es proporcional a los cambios en la señal, y no a su nivel (continua).

2. Estudiar si el filtro es lineal, causal, y estable. Hallar y graficar en módulo y fase la respuesta frecuencial del filtro.

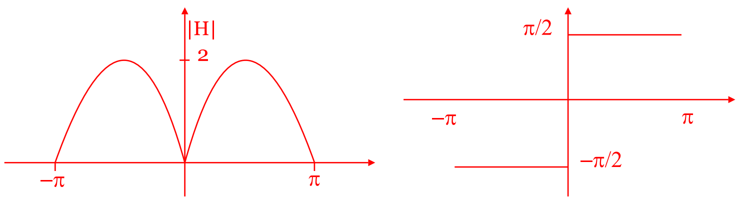
   Solución: El filtro es lineal pues está definido por su respuesta al impulso. No es causal porque $h[n]$ tiene componentes no nulos en $n < 0$. Es estable ya que $\sum_k |h[k]| = 2 < \infty$.

   Estudiemos su respuesta frecuencial:

   $$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$

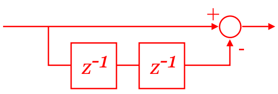
   Entonces,

   $$H(z) = z - z^{-1}$$
   $$H(\theta) = 2j\, sen(\theta)$$



3. Dar un diagrama de bloques que implemente este filtro, detallando las consideraciones necesarias para la implementación.

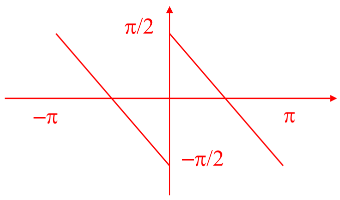
   Solución:



El filtro implementado es causal, con lo que la respuesta al impulso queda

$$\delta[n] - \delta[n-2]$$

y la respuesta frecuencial se multiplica por $e^{-j\theta}$

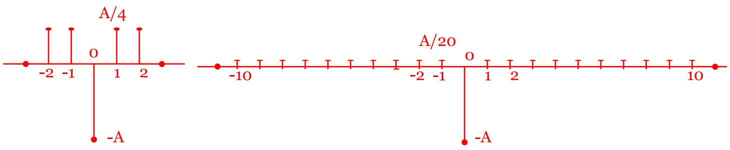


Se propone ahora el siguiente filtro:

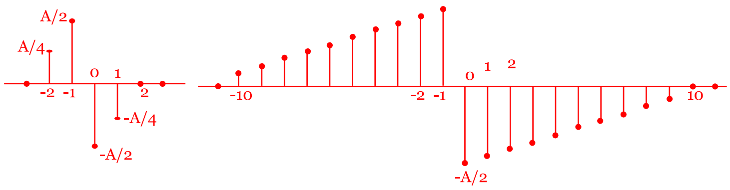
$$\begin{aligned} &g[0] = -A \\ &g[n] = A/2N \text{ para } 1 \leq |n| \leq N \\ &g[n] = 0 \; si \; |n| > N \end{aligned}$$

4. Hallar y graficar la respuesta al impulso, al escalón, y en frecuencia, para los casos $N = 2$ y $N = 10$;

   Solución: Los siguientes esquemas muestra $g[n]$ en los casos pedidos:



En los que próximos se ve las respuestas al escalón en ambos casos:



Nos resta encontrar la respuesta frecuencial.

$$H_N(z) = -A + \frac{A}{2N}\sum_{k=1}^{N}(z^k + z^{-k}) = -A + \frac{A}{2N}\left(\frac{z - z^{N+1}}{1-z} + \frac{z^{-1} - z^{-N-1}}{1 - z^{-1}}\right)$$

$$H_N(z) = A\left(-1 - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1}\right)$$

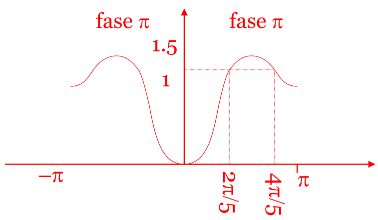
Evaluando en $e^{j\theta}$,

$$H_N(\theta) = A\left(-\frac{2N+1}{2N} + \frac{1}{2N}\frac{sen((N+1/2)\theta)}{sen(\theta/2)}\right)$$

Observe que $H_N(\theta)$ es real.

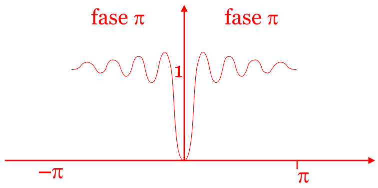
Consideraremos para estos cálculos $A = 1$. Cuando $N = 2$,

$$H_2(\theta) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\frac{sen(5/2\,\theta)}{sen(\theta/2)}$$



En el caso $N = 10$,

$$H_{10}(\theta) = -\frac{21}{20} + \frac{1}{20}\frac{sen(21/2\,\theta)}{sen(\theta/2)}$$



5. Para N genérico, hallar la potencia a la salida del filtro g debida a ruido de cuantización en la entrada (no se consideran errores en las operaciones).

Solución: Modelamos el ruido $r(n)$ como blanco, de distribución uniforme $U[-\Delta/2, \Delta/2]$. Entonces, $\mathcal{E}\{r[n]\} = 0$ y $\mathcal{E}\{r^2[n]\} = \frac{\Delta^2}{12}$ y $R_r[n] = \frac{\Delta^2}{12}\delta[n]$. Por lo tanto,

$$G_r(\theta) = \frac{\Delta^2}{12}$$

y

$$G_y(\theta) = |H(\theta)|^2\frac{\Delta^2}{12}$$

Antitransformando,

$$R_y[n] = \frac{\Delta^2}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\theta)|^2 e^{jn\theta}d\theta$$

$$\sigma_y^2 = R_y[0] = \frac{\Delta^2}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\theta)|^2 d\theta$$

Aquí podemos utilizar el teorema de Parseval,

$$\sigma_y^2 = \frac{\Delta^2}{12}\sum_k |h[k]|^2 = \frac{\Delta^2}{12}\left(A^2 + 2N\frac{A^2}{4N^2}\right)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Delta^2}{12}A^2\left(1 + \frac{1}{2N}\right)$$

Problema 2

Interesa recuperar una señal $x[n]$ a partir de una señal distorsionada $y[n] = x[n] * h[n]$. En teoría, $x[n]$ puede ser recuperada pasando $y[n]$ a través del filtro inverso

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \text{ con } H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

Asuma que el filtro que distorsiona es un FIR de respuesta al impulso

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - n_0]$$

donde n_0 es un entero positivo.

1. Sea $\{h[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una secuencia discreta cuya tranformada $\mathcal{Z}$ es $H(z)$. Para N entero positivo se define $H_N(z) = H(z^N)$.

   Probar la siguiente propiedad general:

$$h_N[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h\,[l]\;\;\delta[n - lN]$$

donde $h_N[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H_N(z)$

Solución: Por un lado tenemos que

$$H_N(z) = \sum_n h_N[n] z^{-n}$$

y por otro lado

$$H_N(z) = H(z^N) = \sum_n h[n] z^{-nN}$$

Entonces tenemos que $\forall z$ se cumple $\sum_n h_N[n] z^{-n} = \sum_m h[m] z^{-mN}$, de donde se obtiene

$$h_N[n] = \begin{cases} h\left[\frac{n}{N}\right] \text{ si } n \text{ es múltiplo de } N \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

De donde

$$h_N[n] = \sum_k h[k]\ \delta[n - kN]$$

2. Determinar $h_i[n]$ *causal* basado en la definición de $H_i(z)$ dada más arriba.

   Solución: $H(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-n_0}$. Entonces el sistema inverso será $H_i(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-n_0}}$. Aplicando el resultado anterior con $N = n_0$, tenemos que $h_i[n]$ es la expansión con factor n_0 de la antitransformada causal de $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. La antitransformada es $u[n] \frac{1}{2^n}$. Entonces, $h_i[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \delta[n - kn_0]$.

3. Se desea aproximar $h_i[n]$ por un FIR causal de $M \times n_0$ coeficientes usando truncado de la respuesta al impulso. Dar los coeficientes del filtro aproximante $h_i^T[n]$. Evaluar $h[n] * h_i^T[n]$ y comentar sobre cuán bien el filtro truncado aproxima al filtro inverso, y cómo la bondad de la aproximación varía con M.

   Solución: El filtro aproximante será $h_i^T[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2^k} \delta[n - kn_0]$. Hacemos la convolución, $\left(h * h_i^T\right)[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2^k} \delta[n - kn_0] * \left\{\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - n_0]\right\}$. Entonces

   $$\left(h * h_i^T\right)[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ \frac{1}{2^k} \delta[n - kn_0] - \frac{1}{2^{k+1}} \delta[n - (k+1)n_0] \right\}$$

   que se puede reconocer como una suma telescópica, entonces su resultado es

   $$\left(h * h_i^T\right)[n] = \delta[n] - \frac{1}{2^M} \delta[n - Mn_0]$$

   Ahora, lo que nos interesa obtener es sólo la $\delta[n]$, de modo que el error que se comete es $e[n] = \frac{1}{2^M} \delta[n - Mn_0]$, un eco de amplitud decreciente con M y a distancia $M \times n_0$.

4. Ahora se considera el efecto del ruido de operaciones que afecta el funcionamiento del filtro FIR diseñado. Se supone que se trabaja con aritmética de **punto fijo** de b bits de parte fraccionaria, con redondeo.

   Observación: *recordar que las operaciones multiplicar por* 0 *y multiplicar por* 1 *no introducen error (ruido).*

   (a) Se desea cuantificar el error global que se comete en la recuperación de $x[n]$ a partir de la señal de entrada $h[n] * x[n]$ como entrada al filtro $h_i^T[n]$. Para eso, si $y_r[n]$ es la señal de salida del filtro $h_i^T[n]$, entonces se considera el error cuadrático medio

   $$\varepsilon^2(M) = \mathbb{E}\left\{(x[n] - y_r[n])^2\right\}$$

   Probar que si P_x y P_e representan las potencias de $x[n]$ y del ruido introducido en cada uno de los multiplicadores respectivamente, entonces:

$$\varepsilon^2(M) = \left(\frac{1}{4}\right)^M P_x + (M-1)P_e$$

Se deben justificar todos los pasos cuidadosamente.

Solución: Si el filtro ecualizador se implementa como un filtro transversal, a la salida de cada coeficiente (multiplicador) no nulo y no unitario tendremos un error que modelaremos como aditivo, blanco de media nula, no correlacionado con $x[n]$ ni con los ruidos introducidos en otros multiplicadores, y de potencia P_e (que se puede expresar en función del número de bits b de la parte fraccionaria si además decimos que cada ruido se distribuye uniformemente en un intervalo que depende de b, pero esto no viene al caso). La cantidad de estos coeficientes (no nulos y no unitarios) es $(M-1)$, y todas estas señales de error no correlacionadas entre sí ni con $x[n]$ aparecerán directamente sumadas a la salida, por lo cual la potencia de los errores será $(M-1)\,P_e$. Al tratarse de un sistema lineal se pueden separar los componentes de señal de los componentes de ruido: $y_r[n] = y_{r_x}[n] + y_{r_e}[n]$. Entonces, $(x[n] - y_{r_x}[n] - y_{r_e}[n])^2 = (x[n] - (x[n] - 2^{-M}x[n-Mn_0]) - y_{r_e}[n])^2 = (2^{-M}x[n-Mn_0] - y_{r_e}[n])^2$. Entonces, el valor esperado será $\varepsilon^2(M) = 2^{-2M}P_x + (M-1)P_e$, pues los términos cruzados se cancelan al tener media luna

(b) Ahora se desea minimizar el error global cometido. Si $\frac{(\ln 2)P_x}{P_e} = 2^7$ determinar el M para el cual se alcanza un mínimo de $\varepsilon^2(M)$.

Solución: Derivando el error respecto de M, tenemos

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial M} = P_x(-\ln 4)4^{-M} + P_e$$

cantidad que debe ser nula en el mínimo. Entonces debe ser $\frac{P_x \ln 4}{P_e} = 4^M$. Entonces como $\ln 4 = 2\ln 2$, tenemos que $2^8 = 4^M$, o sea $M = 4$. Ahora verifiquemos que se produce un mínimo, para eso calculamos la derivada segunda y vemos que es positiva:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial M^2} = P_x(\ln 4)^2 4^{-M} \; > \; 0 \; \forall M$$