Muestreo y Procesamiento Digital
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

8 de febrero de 2002

Indicaciones:

- El examen tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y cdpresentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones

Pregunta

Enunciar y demostrar el teorema de muestreo.

Problema 1

1. Definir y demostrar la condición necesaria y suficiente de estabilidad para un SLIT.

   Solución: Un sistema lineal e invariante en el tiempo es estable BIBO sí y solo sí

   $$\sum_{k \in \mathcal{Z}} |h[k]| < +\infty$$

   Primero probaremos el recíproco. Supongamos que

   $$\sum_{k \in \mathcal{Z}} |h[k]| = N < +\infty$$

   y $x[n]$ una señal de entrada acotada, es decir existe $M \in \mathcal{R}^+$ tal que $|x[n]| \leq M \, \forall n \in \mathcal{Z}$. Consideremos $y[n]$ la salida del sistema respecto de esta entrada.

   $$y[n] = \sum_{k \in \mathcal{Z}} h[k]x[n-k]$$

   $$|y[n]| = |\sum_{k \in \mathcal{Z}} h[k]x[n-k]| \leq \sum_{k \in \mathcal{Z}} |h[k]| \cdot |x[n-k]| \leq M \sum_{k \in \mathcal{Z}} |h[k]| = MN < +\infty$$

   Es decir que $|y[n]| \leq MN$ para todo $n \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto para toda entrada acotada, la salida es acotada.

   Para probar el directo suponemos que

   $$\sum_{k \in \mathcal{Z}} |h[k]| = +\infty$$

y probaremos que el sistema no es estable.

Considero la entrada $x[n] = e^{-jarg(h[-k])}$, es claro que $|x[k]| = 1\ \forall k \in \mathcal{Z}$ y $y[n]$ la salida de este sistema.

$$y[0] = \sum_{k\in\mathcal{Z}} h[k]x[-k] = \sum_{k\in\mathcal{Z}} h[k]e^{-jarg(h[k])} = \sum_{k\in\mathcal{Z}} |h[k]| = +\infty$$

Por lo tanto encontramos una entrada acotada cuya salida no es acotada, probando que el sistema no es estable bibo.

2. Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO en términos de la ubicación de los polos de la transformada $\mathcal{Z}$ de la función de transferencia de un sistema causal $H(z)$. (**Nota**: no es necesario hacer la demostración.)

   Solución: Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es estable BIBO sí y solo sí los polos de $H(z)$ están dentro del circulo unidad (donde $H(z)$ es la transformada $\mathcal{Z}$ de la respuesta al impulso).

3. Sea $H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$, el sistema inverso de $H(z)$. ¿Qué condiciones debe satisfacer $H(z)$ para que $H_i(z)$ sea estable? (**Nota**: a estos sistemas se les llama *sistemas de fase mínima*)

   Solución: Deben cumplir que tanto sus polos como ceros estén en el interior del circulo unidad.

4. Sea

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\left(1 - d_k z^{-1}\right)},\ \text{con } a_0, b_0 \in I\!R$$

   Probar las siguientes propiedades:

   (a) $|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H^*(\frac{1}{z^*})\big|_{z=e^{j\omega}}$

   Solución:

$$|H(e^{j\theta})|^2 = H(e^{j\theta})H^*(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta})H^*((e^{-j\theta})^*)$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = H(e^{j\theta})H^*\left(\frac{1}{(e^{j\theta})^*}\right) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\theta}}$$

   que era lo que queríamos probar.

   (b) $|H(e^{j\omega})|^2 = |\widetilde{H}(e^{j\omega})|^2$

   donde $\widetilde{H}(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{n}(z^{-1}-c_k^*)}{\prod_{k=1}^{m}(z^{-1}-d_k^*)}$; es decir se reemplazan los ceros c_k de $H(z)$ por $\frac{1}{c_k^*}$ y los polos d_k por $\frac{1}{d_k^*}$.

   Sugerencia: Probar que el sistema $H(z) = \frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$ es un pasatodo (esto significa que $|H(e^{j\theta})| = 1$ para todo θ).

   Solución: Probaremos que

$$\frac{|1 - az^{-1}|}{|z^{-1} - a^*|}\Big|_{z=e^{j\theta}} = 1$$

   para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y para todo $a \in \mathcal{C}$.

$$|\ e^{j\theta} - a\ |^2 = (e^{j\theta} - a)(e^{-j\theta} - a^*) = 1 - e^{j\theta}a^* - e^{-j\theta}a + |\ a\ |^2$$

$$|\ 1 - a^*e^{j\theta}\ |^2 = (1 - a^*e^{j\theta})(1 - ae^{-j\theta}) = 1 - e^{j\theta}a^* - e^{-j\theta}a + |\ a\ |^2$$

   Probando la igualdad anterior. Ahora consideremos el caso general y apliquemos lo que ya sabemos,

$$|H(z)|\big|_{z=e^{j\theta}} = \frac{|b_0|}{|a_0|}\frac{\prod_{k=1}^{n}|(1 - c_k z^{-1})|}{\prod_{k=1}^{m}|(1 - d_k z^{-1})|}\Bigg|_{z=e^{j\theta}} = \frac{|b_0|}{|a_0|}\frac{\prod_{k=1}^{n}|(z^{-1} - c_k^*)|}{\prod_{k=1}^{m}|(z^{-1} - d_k^*)|}\Bigg|_{z=e^{j\theta}} = |\widetilde{H}(z)|\Big|_{z=e^{j\theta}}$$

5. La Figura 1 muestra la forma de compensar una señal que ha sido pasada por un SLIT con una respuesta en frecuencia no deseada, $H_d(e^{j\theta})$.

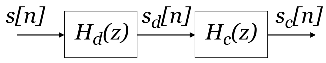


Figura 1: Ver Problema 1, parte 5.

La compensación perfecta se obtendría usando $H_c(z) = \frac{1}{H_d(z)}$. Sin embargo, si asumimos que $H_d(z)$ es causal y estable, y queremos que $H_c(z)$ también sea causal y estable, la compensación perfecta sólo es posible si $H_d(z)$ es de fase mínima. ¿Por qué?

Basado en las partes anteriores, explicar y justificar cómo se tendría que diseñar $H_c(z)$ causal y estable, si $H_d(z) = \frac{z-a}{z-b}$ con $|a| > 1$ y $|b| < 1$, para que

$$|H_d(e^{j\omega})H_c(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall\omega$$

Solución: La compensación perfecta sólo es posible si el sistema es de fase mínima. Como queremos que el sistema inverso $H_c(z)$ sea causal y estable, los ceros de $H_d(z)$ deben estar en el interior del circulo unidad.

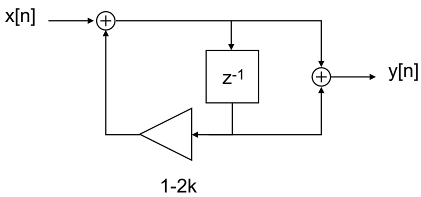
Si $H_d(z) = \frac{z-a}{z-b}$ con $|a| > 1$ y $|b| < 1$ diseñamos el filtro $H_c(z) = \frac{z-b}{1-a^*z}$.

Este filtro es causal y estable dado que su único polo es $\frac{1}{a^*}$ que esta dentro del circulo unidad, al ser $|a| > 1$

$$|H_dH_c(e^{j\theta})| = \left|\frac{z-a}{z-b}\right| \cdot \left|\frac{z-b}{1-a^*z}\right|\Bigg|_{z=e^{j\theta}} = 1$$

Problema 2

1. Se considera el siguiente filtro digital **H**:



(a) Hallar la transferencia del filtro.

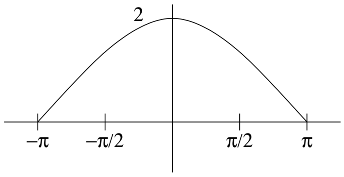
Solución: Tomando transformadas, y llamando W a la entrada del retardo, se cumple: $W = X + W(1-2k)z^{-1}$, y por otra parte, $Y = W(1+z^{-1})$. Entonces, $W = X/(1-(1-2k)z^{-1})$, y la transferencia es $H = Y/X = \frac{1+z^{-1}}{1-(1-2k)z^{-1}} = \frac{z+1}{z-(1-2k)}$.

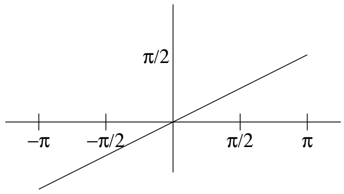
(b) Hallar el rango de variación del parámetro k para que el filtro sea estable.

Solución: El polo del sistema está en $z = 1-2k$, y debe tener módulo inferior a 1 para que el filtro sea estable. Por lo tanto, $-1 < 1-2k < 1$, o equivalentemente, $0 < k < 1$.

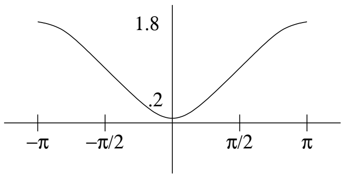
(c) Se considera de aquí en más $\mathbf{k = 1/10}$. Expresar y graficar la respuesta frecuencial de **H**.

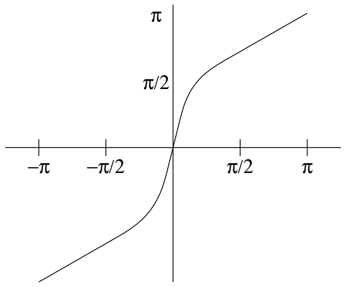
Solución: La respuesta frecuencial es $H(e^{j\theta}) = \frac{e^{j\theta}+1}{e^{j\theta}-0.8}$.
Para bosquejar esta respuesta, estudiamos separadamente numerador y denominador.
El numerador $z+1$ corresponde a un filtro de fase lineal (centrado en 1/2), con lo que su fase será $\theta/2$. El módulo vale 2 alrededor de $\theta = 0$; vale $\sqrt{2}$ en $\theta = \pi/2$; y en $\theta = \pi$ pasa por 0 con pendiente -1.



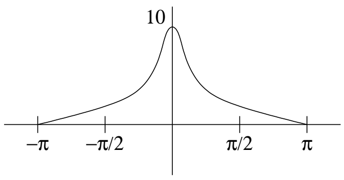


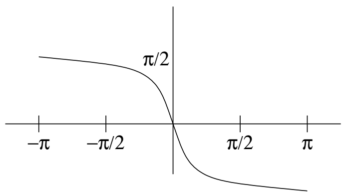
El denominador $z - 0.8$ tiene módulo 0.2 alrededor de $\theta = 0$, y 1.8 alrededor de $\theta = \pi$, y crece suavemente en el medio. La fase es más violenta, al estar 0.2 cerca del origen: en $\theta = 0$, la fase cruza 0 con pendiente 5; pasa por $\pi/2$ cuando $\cos(\theta) = 0.8$ (es decir, $\theta = 37$ grados); y cruza π en $\theta = \pi$ con pendiente $1/1.8 = 5/9$.





Haciendo el cociente de los módulos, y la resta de las fases, se obtiene la transferencia del filtro:





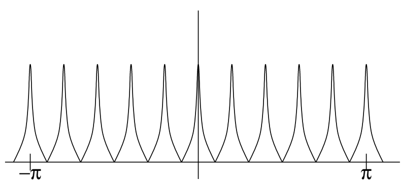
2. Sea $\mathbf{G}(z)$ un filtro digital racional. Sea $\mathbf{G}_N(z)$ el filtro que que se obtiene de $\mathbf{G}$ sustituyendo cada retardo por un tren de N retardos.

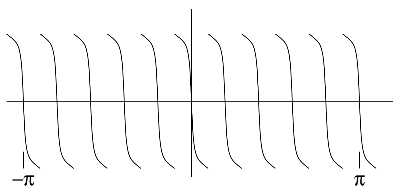
   (a) Hallar la respuesta frecuencial $\mathbf{G}_N(\theta)$ en función de $\mathbf{G}(\theta)$.

   Solución: Al sustituir las unidades de retardo por trenes de N retardos, el cociente de polinomios en z queda evaluado en z^N. Por lo tanto, ocurrirá lo mismo con la respuesta en frecuencia, que quedará evaluada en $N\theta$: $\mathbf{G}_N(\theta) = \mathbf{G}(N\theta)$.

   (b) En particular, bosquejar $\mathbf{H}_N(\theta)$ con $N = 10$.

   Solución:

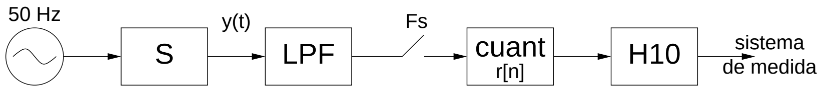




3. El sistema $\mathcal{S}$ de la figura es no lineal y sin memoria (es decir, su salida se puede expresar como $y(t) = f(x(t))$). La señal de entrada es sinusoidal, periódica, de frecuencia 50 Hz.

Se quiere estudiar la forma de onda de salida, $y(t)$, usando un sistema de adquisición digital. Pero el cuantizador utilizado no es de resolución suficiente como para tener una buena medida. La distorsión de cuantización se puede modelar de la manera habitual: como ruido blanco $r[n]$ independiente sumado a la señal.

Para obtener una medida menos ruidosa, se plantea el siguiente sistema, que consiste en intercalar el filtro $\mathbf{H}_{10}$ luego del cuantizador.



(a) Explicar cómo funciona el sistema propuesto, y cuál es la ventaja de introducir el filtro $\mathbf{H}_{10}$.

Solución: La salida del sistema no lineal será también periódica de frecuencia 50 Hz, y por lo tanto su espectro contendrá únicamente componentes en los múltiplos enteros (armónicos) de 50 Hz. El objetivo del filtro, como sugiere la letra, es eliminar potencia del ruido sin modificar la señal. Para esto, se puede aprovechar la transferencia de H_{10} para que deje pasar los armónicos, y atenúe las frecuencias intermedias (donde hay ruido y no hay señal).

Para esto hay que hacer coincidir los máximos de la transferencia con la posición de los armónicos. Esto se hace eligiendo la frecuencia de muestreo de manera que la frecuencia fundamental se corresponda con el primer máximo de la transferencia.

(b) Hallar la frecuencia de muestreo, y la frecuencia de corte del pasabajos.

Solución: Debe ser $2\pi \frac{50}{f_s} = 2\pi/10$, lo que da $f_s = 500$Hz.

El pasabajos debe asegurar que no exista solapamiento, por lo cual debe eliminar todos los componentes por encima de $f_s/2 = 250$Hz, inlcuyendo el componente en 250 Hz. El filtro debería ser plano hasta 200 Hz, donde se encuentra el último armónico que podrá ser analizado por el sistema.

(c) Expresar la ganancia en relación señal a ruido obtenida al usar el filtro $\mathbf{H}_{10}$.

Solución: La señal queda intacta, salvo por un factor 10 de ganancia, que le da una potencia 100 veces mayor.

El ruido, por el contrario, pasa de tener potencia $\sigma_r^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sigma_r^2 d\theta$, a tener potencia $\sigma_{H10}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |H_{10}(e^{j\theta})|^2 \sigma_r^2 d\theta$.

La ganacia es

$$g = \frac{100}{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |H_{10}(e^{j\theta})|^2} d\theta$$

Evidentemente, el denominador es mucho menor que 100, ya que $|H_{10}|^2$ valdrá 100 en los múltiplos de $2\pi/10$, y caerá muy rápidamente en las frecuencias intermedias.