Muestreo y Procesamiento Digital
Solución al Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

20 de agosto de 2001

Pregunta

1. Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad de filtros digitales.

   La condición necesaria y suficiente para que un filtro digital con respuesta al impulso $h[n]$ sea estable, es que la norma 1 de la respuesta sea acotada: $\sum_n |h[n]| < \infty$.

2. Demostrar únicamente que la condición es necesaria.

   Hay que demostrar que si no se cumple la condición, el filtro no es estable. O lo que es lo mismo, que si el filtro es estable, entonces vale la condición. Esto último se demuestra fácilmente: sea un filtro estable. Elijo como entrada $x[n] = \mathrm{sg}(h[-n])$ o 0 si $h[-n] = 0$. Entonces, $y[0] = \sum_n h[n]\mathrm{sg}(h[+n]) = \sum_n |h[n]|$.

   Como el filtro es estable por hipótesis, $y[0]$ debe ser finito, y por lo tanto vale la condición.

Ejercicio

1. Enunciar el teorema del muestreo para señales.

   Sea una señal $x(t)$ de banda acotada f_x. Sean $x[n]$ las muestras de $x(t)$ tomadas a frecuencia f_s.

   Entonces, siempre que $f_s > 2f_x$, $x(t)$ se puede reconstruir exactamente a partir de $x[n]$.

2. En las condiciones del teorema de muestreo, determinar un procedimiento o expresión para recuperar exactamente la señal de tiempo continuo a partir de las muestras.

   Teórico: $x(t) = \sum_n x[n]\text{sinc}(tf_s - n)$.

3. Sea un proceso $a(t)$ estacionario ergódico, y sean $a[n]$ sus muestras tomadas a frecuencia f_s. $a(t)$ tiene autocorrelación $R_a(\tau)$. Hallar la autocorrelación de $a[n]$: $R_a[n]$.

   $R_a[n] = E\{a[m]a[m+n]\} = E\{a(mT_s)a(mT_s + nT_s)\} = R_a(nT_s)$.

4. A partir de los resultados anteriores, dar un procedimiento para conocer exactamente $R_a(\tau)$ conociendo $R_a[n]$, e indicar las hipótesis bajo las cuales este procedimiento es válido.

   $R_a[n]$ son muestras de $R_a(\tau)$ tomadas a frecuencia f_s. El espectro $G_a(f)$ de $a(t)$ es la transformada de fourier de $R_a(\tau)$.

   Entonces, si $a(t)$ es de espectro acotado f_a, y $f_s > 2f_a$, entonces $R_a(\tau)$ se puede recuperar exactamente a partir de sus muestras, que son justamente $R_a[n]$. Entonces quedaría $R_a(\tau) = \sum_n R_a[n]\text{sinc}(tf_s - n)$.

5. Suponiendo que se cumplen las condiciones de la parte anterior, y que $R_a[n] = \delta[n]$, calcular $R_a(\tau)$.

   Aplicando lo anterior, $R_a(\tau) = \text{sinc}(tf_s)$.

Problema

Se considera un sistema formado por un muestreador que trabaja a frecuencia $f_s = 90\text{kHz}$, seguido por un filtro digital dado por la siguiente ecuación de recurrencia, donde la entrada es $x[n]$ y la salida $y[n]$:

$$y[n] + \beta y[n-1] = x[n] + \alpha x[n-1] + x[n-2] \quad (1)$$

1. Calcular α y β para que cuando se ingresa al sistema con la señal $x_1(t) = \cos(2\pi 60000t)$, la salida en régimen sea nula, y cuando al sistema ingresa una señal constante, la ganancia del filtro digital sea $+2$.

$x_1[n]$ es una sinusoidal a frecuencia $\theta_1 = \frac{4\pi}{3}$, por lo cual deben existir un par de ceros sobre el circulo unidad a frecuencias $\pm\theta_1$.

Entonces, el numerador debe ser proporcional a $(z - e^{j\theta_1})(z - e^{-j\theta_1})$ $= z^2 - 2z\cos(\theta_1) + 1$. Por lo tanto, $\alpha = -2\cos(\theta_1) = +1$.

En continua, la ganancia es $+2$, por lo tanto (sustituyendo $x[n] = 1$ en la ecuación de recurrencia y estudiando la salida en régimen), $2(1+\beta) = 1+1+1$, entonces $\beta = 1/2$.

2. Estudiar la estabilidad del filtro digital determinado en la parte anterior.

$|\beta| < 1$, por lo cual el filtro es estable (notar que el polo del filtro está en $z = -\beta$).

3. Calcular la respuesta al impulso del filtro digital. Sugerencia: descomponer el filtro como un filtro recursivo, seguido por un filtro no recursivo.

Para simplificar el estudio de $h[n]$, considero 2 filtros en cascada: $k[n] + \beta k[n-1] = x[n]$ seguido por $y[n] = k[n] + \alpha k[n-1] + k[n-2]$.

El filtro recursivo tiene respuesta $h_1[n] = (-1/2)^n u[n]$, y el filtro no recursivo tiene respuesta $h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$.

Haciendo la convolución de estos 2 filtros, queda $h[n] = h_1[n] + h_1[n-1] + h_1[n-2] = (-1/2)^n\{u[n] - 2u[n-1] + 4u[n-2]\}$.

4. Dar el diagrama de bloques del filtro digital utilizando únicamente 2 elementos de retardo.

Forma canónica: teórico.

5. Para esta implementación, las operaciones se realizan en punto fijo con redondeo, con 15 bits para la parte fraccionaria. Calcular la potencia, a la salida del filtro, de los errores introducidos en las operaciones.

En punto fijo, sólo se introducen errores en los productos. En este filtro, el único producto es el factor 1/2 que se realimenta a la entrada del filtro. Por lo tanto, el modelo de ruido aditivo a la salida del producto equivale a alimentar el filtro completo con ruido blanco y estudiar la salida.

Como el modelo de ruido da ruido blanco, aplicamos respuesta de un filtro a un proceso, luego Parseval, y llegamos a lo siguiente: $\sigma_{y_e}^2 = \sigma_e^2 \sum_n |h[n]|^2$.

$\sum_n |h[n]|^2 = 1 + 1/4 + 9 \sum_{n=2}^{\infty} (1/4)^n = 5/4 + \frac{9/16}{1-1/4} = 2$

Entonces, $\sigma_{y_e}^2 = 2\sigma_e^2$, con $\sigma_e^2 = \frac{2^{-30}}{12}$.