Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

7 de marzo de 2001

Indicaciones:

- El parcial tiene una duración total de 4 horas, y un puntaje máximo de 60 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar unicamente un lado de las hojas.
- Cada ejercicio o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- En la primer hoja de cada ejercicio o pregunta se deberá indicar el número de hojas que corresponden a ese ejercicio o pregunta..
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. A tales efectos, se han reservado 5 de los puntos del parcial. A criterio del tribunal, se podrá calificar con 0 puntos un examen considerado ilegible.

Pregunta [10 pts.]

1. [3 pts.] Enunciar el Teorema que da condiciones necesaria y suficiente para estabilidad **BIBO** de **SLIT**'s.
2. [7 pts.] Demostrar el Teorema.

Ejercicio [20 pts.]

1. [2 pts.] Enunciar y justificar las condiciones que debe cumplir un sistema sin distorsión. Ahora si el sistema es un **SLIT** digital, ¿cómo se expresan esas condiciones en el espectro?
2. [3 pts.] Se considera el filtro digital real de la Figura 1.

   Hallar condiciones en los parámetros del filtro para que este **no** presente distorsión de fase. En este caso, hallar la respuesta en frecuencia del mismo. Observar que el retardo de grupo del filtro es de una muestra.

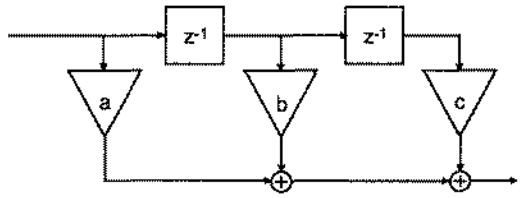


Figura 1: Filtro digital.

3. Al filtro de la Figura 1 se aplicará la señal $x[n]$, que llega contaminada con ruido blanco aditivo de potencia σ_N^2, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El objetivo del filtro es recuperar la señal.

   (a) [5 pts.] Hallar los coeficientes teniendo en cuenta las dos condiciones siguientes:

      i. Las condiciones halladas en la parte 2.

      ii. Que la salida sea lo más similar posible a la señal original $x[n]$, tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido. Es decir, teniendo en cuenta la observación hecha sobre el retado de grupo, se deberá minimizar:

      $$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\{(y[n] - x[n-1])^2\}$$

   Datos: El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

   $$R_x[n] = \sigma_x^2 \left(\delta[n] + \frac{\delta[n-1] + \delta[n+1]}{2}\right) \qquad \sigma_x^2 = \sigma_N^2$$

   (b) [1 pts.] Verificar que el filtro finalmente diseñado no introduce distorsión en fase.

4. [6 pts.] Dar un modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto flotante* y se *redondea*. Justifique.

5. [3 pts.] Calcular la potencia de "ruido de operaciones" a la salida del filtro de la Figura 1, con coeficientes a, b y c genéricos para una entrada de media nula y características de ruido blanco. Se debe fundamentar correctamente todos los pasos.

Problema [25 pts.]

Se desea fabricar un filtro pasa altos para señales de tiempo continuo, utilizando un filtro digital real. El sistema funcionará en tiempo real.

1. (a) [2 pts.] Dar un diagrama de bloques completo del sistema

   (b) [3 pts.] ¿Qué condiciones debe cumplir el filtro digital para poder realizar el sistema?

(c) [1 pts.] Las señales a procesar tienen las componentes de interés por debajo de 200 Hz. Dar la mínima frecuencia de muestreo posible. Esta frecuencia se utilizará en el resto del ejercicio.

2. El sistema debe además cumplir con los siguientes requerimientos:

   - Deberá eliminar completamente los componentes en 50 Hz, con el fin de minimizar la interferencia de la red eléctrica.
   - Debe tener respuesta unitaria a la frecuencia de trabajo más alta.

   En su forma más genérica, el filtro tendrá una transferencia de la forma:

$$H(z) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{N}(z - c_i)}{\prod_{j=1}^{M}(z - p_j)}$$

   (a) [3 pts.] ¿Qué imponen los requerimientos de diseño sobre el numerador? Hallar N_M, la mínima cantidad de ceros que debe tener el sistema.

   (b) [4 pts.] Si el filtro tiene exactamente N_M ceros, dar la forma genérica del filtro que satisfaga todas las condiciones impuestas: requerimientos de diseño y condiciones de la parte 1.

   (c) [4 pts.] Si ahora además se impone que el filtro sea lo más sencillo posible, es decir, usando la menor cantidad de retardos y multiplicaciones posibles, ¿qué forma debe tener el filtro?

   Bosquejar el módulo de la transferencia de este filtro, y hallar la frecuencia de caída 3 dB ($1/\sqrt{2}$).

3. El filtro queda determinado por los requerimientos anteriores, por lo cual no es posible elegir la frecuencia de corte. Para ello sería necesario introducir al menos un grado de libertad más, mediante el agregado de un polo o cero reales. Es claro que para que el filtro siga siendo lo más sencillo posible (en el sentido de la parte 2.(c)) y para que cumpla con todas las restricciones hasta ahora impuestas, es necesario hacer alguna otra modificación después del agregado de un polo o un cero.

   (a) [3 pts.] Si se quiere que la frecuencia de corte se encuentre a 150 Hz, indicar cuál de las dos variantes es la adecuada. Justifique.

   (b) [1 pts.] Hallar los coeficientes correspondientes a su elección de la parte anterior. Bosquejar la respuesta en módulo del filtro.

   (c) [2 pts.] Dar un diagrama de bloques del filtro anterior, usando sumadores, multiplicadores y la menor cantidad posible de retardos.

   (d) [2 pts.] El filtro se implementa con aritmética de punto fijo con redondeo, usando B bits para representar la parte fraccionaria. Plantear la potencia de ruido a la salida debido al error de redondeo en función de $h[n]$, la respuesta al impulso de filtro, la cual no se pide hallar.

EJERCICIO

1. UN SISTEMA NO DISTORSIONA SÍ PARA CUALQUIER ENTRADA $x(t)$ SU SALIDA ES $K\,x(t-T)$

DONDE K y T SON CONSTANTES REALES.

EN UN SLIT DIGITAL ESTO ES EQUIVALENTE A QUE SU TRANSFERENCIA SEA

$$K\,e^{j\alpha\theta}$$

DONDE k y α SON CONSTANTES REALES.

EN EL ESPECTRO, EL MÓDULO DE LA TRANSFERENCIA ES CONSTANTE Y LA FASE ES LINEAL.

2.

$$H(z) = a + b z^{-1} + c z^{-2}$$

$$H(e^{j\theta}) = a + b e^{-j\theta} + c\, e^{-2j\theta} = e^{-j\theta}\left(b + a e^{j\theta} + c e^{-j\theta}\right)$$

si $a=c$

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(b + 2a\cos\theta\right)$$

$b+2a\cos\theta$ ES REAL.

PARA QUE LA FASE SEA LINEAL.

$b+2a\cos\theta$ NO DEBE CAMBIAR DE SIGNO.

3

a) USAMOS LA CONDICIÓN ENCONTRADA EN 2)

$a = c$

$$y[n] = a\,x[n] + b\,x[n-1] + a\,x[n-2] + a\,n[n] + b\,n[n-1] + a\,n[n-2]$$

$$\varepsilon^2 = E\left\{ \left(y[n] - x[n-1] \right)^2 \right\}$$

$$\varepsilon^2 = E\left\{ \left(a\left(x[n] + x[n-2] \right) + (b-1)\,x[n-1] + a\left(n[n] + n[n-2] \right) + b\ n[n-1] \right)^2 \right\}$$

$$\varepsilon^2 = \left[2a^2 + (b-1)^2 \right] R_x[0] + \left[2a^2 + b^2 \right] R_n[0] + 4a(b-1)\,R_x[1]$$

PUES $R_n[1] = R_n[2] = 0$

$R_x[2] = 0$

$$R_x[0] = \sigma_x^2 \qquad R_x[1] = \frac{\sigma_x^2}{2} \qquad R_n[0] = \sigma_n^2 = \sigma_x^2$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2} = 2a^2 + (b-1)^2 + 2a^2 + b^2 + 2a(b-1)$$

$$= 4a^2 + 2b^2 - 2a - 2b + 2ab + 1$$

PARA ENCONTRAR EL MÍNIMO BUSCAMOS LOS PUNTOS QUE ANULAN LAS DERIVADAS PARCIALES.

$$\frac{\partial \frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}{\partial a} = 8a - 2 + 2b = 0 \longrightarrow b = 1 - 4a$$

$$\frac{\partial \frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}{\partial b} = 4b - 2 + 2a = 0 \longrightarrow a = 1 - 2b$$

$$a = 1 - 2 + 8a$$

$$\boxed{a = \frac{1}{7}} \qquad \boxed{b = \frac{3}{7}}$$

DEBEMOS VERIFICAR QUE ES UN MÍNIMO.

EL HESSIANO = $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 \frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}{\partial a \partial b} \\ \dfrac{\partial^2 \frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}{\partial b \partial a} & \dfrac{\partial^2 \frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}{\partial b^2} \end{pmatrix}$ DEBE SER DEFINIDO POSITIVO.

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 8\lambda + 32 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 28 = 0$$

$$\lambda = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} \begin{array}{l} \nearrow 10 \\ \searrow 2 \end{array}$$

LOS VALORES PROPIOS SON POSITIVOS

$\Rightarrow$ ES UN MÍNIMO.

b) $H(e^{j\theta}) = e^{j\theta}\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\cos\theta\right)$

PARA QUE NO DISTORSIONE EN FASE

$\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\cos\theta$ NO DEBE CAMBIAR DE SIGNO.

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \geqslant \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\cos\theta \geqslant \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7} > 0$$

$\Rightarrow \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\cos\theta > 0 \quad \forall\theta$

$\Rightarrow$ NO DISTORSIONA EN FASE.

4

EL MODELO DEL RUIDO EN OPERACIONES EN PUNTO FLOTANTE ES EL SIGUIENTE:

- EN CADA SUMA O MULTIPLICACIÓN SE SUMA UN RUIDO DE LA FORMA εx DONDE x ES EL RESULTADO DE LA OPERACION Y ε ES UN RUIDO BLANCO DE POTENCIA σ_N^2 Y MEDIA m_N
- LOS ε SON INDEPENDIENTES ENTRE SÍ E INDEPENDIENTES DE LA SEÑAL.
- SI SE UTILIZA REDONDEO

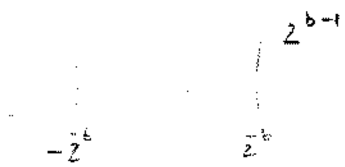
$m_N = 0$ Y

EL ERROR EN LA MANTISA ESTÁ EN EL RANGO $\pm \frac{2^{-b}}{2}$ (b BITS)

$$|Q(x) - x| \leq 2^c \cdot \frac{2^{-b}}{2}$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{Q(x) - x}{x}\right| \leq \frac{\max\left(|Q(x) - x|\right)}{\min\,(x)} = \frac{2^c\, 2^{-b}/2}{2^c\, 1/2} = 2^{-b}$$

$$\Rightarrow \quad -2^{-b} < \varepsilon < 2^{-b}$$

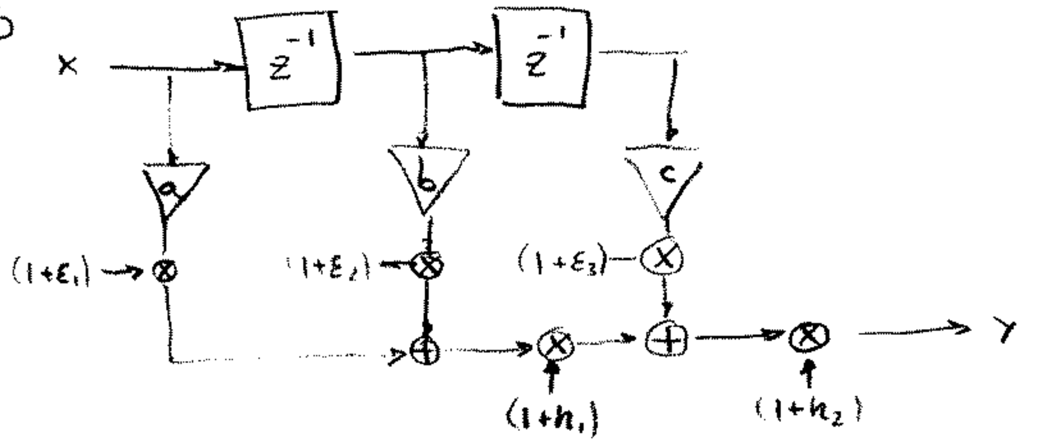


$$\sigma_N^2 = \int_{-2^{-b}}^{2^{-b}} u^2\, 2^{b-1}\, du$$

$$= 2^{b-1} \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-2^{-b}}^{2^{-b}} = 2^{b-1} \cdot 2 \cdot \frac{2^{-3b}}{3} = \frac{2^{-2b}}{3}$$

$$\sigma_N^2 = \frac{2^{-2b}}{3}$$

5



$$Y = (1+n_1)(1+n_2)(1+\varepsilon_1)\,a\,x[n] + (1+n_1)(1+n_2)(1+\varepsilon_2)\,b\,x[n-1]$$
$$+ (1+n_2)(1+\varepsilon_3)\,c\,x[n-2]$$

$$Y_n = \left[(1+n_1)(1+n_2)(1+\varepsilon_1)-1\right] a\,x[n] + \left[(1+n_1)(1+n_2)(1+\varepsilon_2)-1\right] b\,x[n-1] +$$
$$+ \left[(1+n_2)(1+\varepsilon_3)-1\right] c\,x[n-2]$$

$$\sigma^2_{RUIDO} = E\{Y_n^2\}$$

X RUIDO BLANCO $\longrightarrow$ $R_x[n] = \sigma_x^2\,\delta[n]$.

$$\sigma^2_{RUIDO} = \sigma_x^2\Big[\; a^2\,E\{((1+n_1)(1+n_2)(1+\varepsilon_1)-1)^2\} + b^2\,E\{((1+n_1)(1+n_2)(1+\varepsilon_2)-1)^2\}$$
$$+ c^2\,E\{((1+n_2)(1+\varepsilon_3)-1)^2\}\Big]$$

ε_i y n_j SON INDEPENDIENTES Y DE MEDIA NULA.

$$\Rightarrow\; E\{\varepsilon_i\,\varepsilon_j\} = E\{\varepsilon_i\}\,E\{\varepsilon_j\} = m_{\varepsilon_i}\,m_{\varepsilon_j} = 0$$

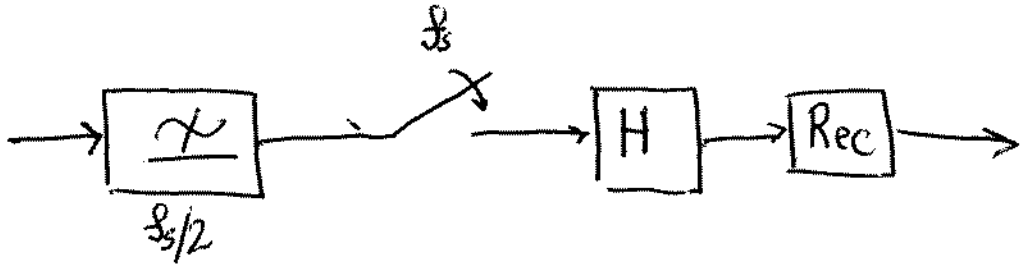
DESPRECIAMOS LOS TERMINOS $(\sigma_N^2)^2$ y $(\sigma_N^2)^3$.

$$\sigma^2_{RUIDO} = \sigma_x^2\,\sigma_N^2\left[3(a^2+b^2) + 2\,c^2\right]$$

Problema

1.	1

(a)



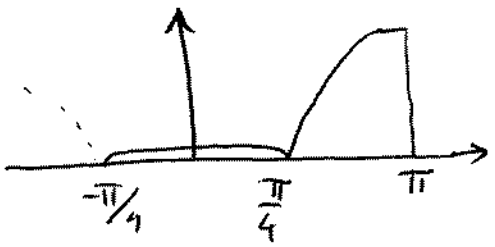
(b) Causalidad, para poder trabajar en tiempo real

Estabilidad, sinó no se puede decir que el sistema funcione correctamente

(c) $f_s = 400$ Hz

2. (a) H debe tener ceros en $e^{\pm j\pi/4}$ $\rightarrow$ $N_M \geq 2$

$\frac{\pi}{4} \leftrightarrow 50$ Hz



(b) $N_M = 2$

$$H(z) = \alpha \frac{(z - e^{j\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})}{\prod_{j=1}^{M} (z - p_i)}$$

Sea $c = e^{j\pi/4}$

- Causalidad $M \geq 2$
- Estabilidad (+ Causalidad) $\}$ $|p_i| < 1$
- que sea real $\rightarrow$ polos reales o de a pares complejos conjugados
- $H(e^{\pm j\pi}) = 1$ $\rightarrow$ $\alpha = \frac{\prod_{j=1}^{M} (1+p_j)\ (-1)^M}{(1+c)(1+c^*)}$

(c) H lo más "sencillo posible" en el sentido de usar la menor cantidad posible de multiplicaciones y retardos. 2

Por ahora tengo libertad nada más que en los polos, que tienen que ser por lo menos 2 para que el sistema sea causal. Si los polos no están en $z=0$ tendré multiplicaciones asociadas a ellos en el diagrama de bloques $\Rightarrow$

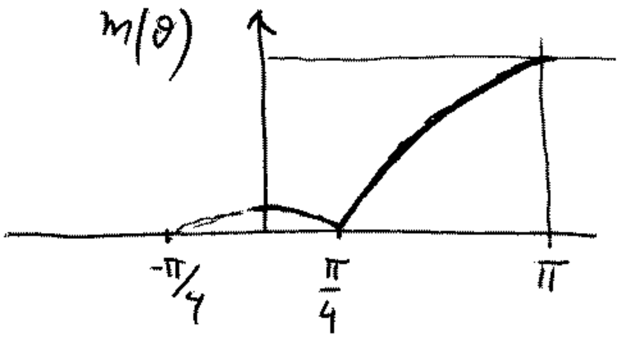
$$\boxed{H(z) = \alpha\frac{(z-c)(z-c^*)}{z^2} = \alpha(1-cz^{-1})(1-c^*z^{-1})}$$ Forma

$$H(e^{j\theta}) = \alpha\left(1+cc^*e^{-2j\theta} - (c+c^*)e^{-j\theta}\right) =$$

$$= \alpha\left(1+e^{-2j\theta} - 2\cos(\pi/4)\,e^{-j\theta}\right) =$$

$$\boxed{H(e^{j\theta}) = \alpha\, e^{-j\theta}\left(2\cos\theta - \sqrt{2}\right)}$$ Resp frecuencial

$$1 = \underset{\substack{\| \\ e^{+j\pi} \\ (\theta=\pi)}}{H(-1)} = \alpha(-1)\left(-2-\sqrt{2}\right) = \alpha\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}$$



$$m(\theta) = |H(e^{j\theta})| = \alpha\,|2\cos\theta - \sqrt{2}|$$

$$m(0) = \alpha(2-\sqrt{2}) = \alpha\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$

$$m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ (frec de caída 3dB)

$$\alpha\,|2\cos\theta - \sqrt{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|2\cos\theta - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}\left[\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\right]^{-1}} = \sqrt{2}+1$$

hay dos posibilidades:

+) $2\cos\theta - \sqrt{2} = \sqrt{2}+1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}+1}{2} = \sqrt{2}+\frac{1}{2} > 1$

no tiene solución

−) $\sqrt{2} - 2\cos\theta = \sqrt{2}+1 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \pm 2\pi/3 \quad (120°)$

Entonces $f_{c_{3Db}} = 133{,}333$ Hz

3. ~~...~~

P) – Si pongo un polo real en P_0 entonces por simplicidad debería sacar uno de los polos en cero que antes tenía, pues lo único que hacen es retardar el sistema, ya que con dos polos el sistema logra ser causal.

C) – Si pongo un cero (real) en C_0 tengo que poner un nuevo polo (en $z=0$ por simplicidad) para mantener la causalidad

P) $H_P(z) = \frac{\alpha(z-c)(z-c^*)}{z(z-P_0)}$

C) $H_C(z) = \frac{\alpha(z-c)(z-c^*)(z-C_0)}{z^3}$

Se busca que la frec. de caída 3dB esté en 150 Hz $\longrightarrow \frac{3\pi}{4}$

(a)

Coco $H_c(e^{j\theta}) = \alpha(2\cos\theta - \sqrt{2})(1 - c_0 e^{-j\theta})$

$|H_c(e^{j3\pi/4})| = 1/\sqrt{2}$ (*)

$H_c(e^{j\pi}) = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_c = \dfrac{1}{(1+c_0)\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}$

(*)

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \qquad \alpha_c \left| -\cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} - \sqrt{2} \right| \left| 1 - c_0 e^{-\frac{3\pi}{4}j} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}\,\alpha_c \left| 1 + c_0\frac{\sqrt{2}}{2} + j c_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{(1+c_0)\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \sqrt{\left(1+\frac{c_0\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{c_0^2}{2}} = 1$$

$$1 + c_0^2 + c_0\sqrt{2} = (1+c_0)^2 \frac{2}{16}(3+2\sqrt{2}) = (1+c_0)^2 \frac{3+2\sqrt{2}}{8}$$

$$(1+c_0^2)\left[\frac{(3+2\sqrt{2})}{8} - 1\right] + c_0\left[2\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right) - \sqrt{2}\right] = 0$$

operando se verifica que el discriminante de esta ec cuadrática es negativo: $Ac_0^2 + Bc_0 + C$ $(A = C)$

$Ac_0^2 + Bc_0 + A$

$$\Delta = B^2 - 4A^2 = (B-2A)(B+2A) < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{8}(3+2\sqrt{2}) - 1 \\ B = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} B+2A = -1/2 < 0 \\ B-2A = 2-\sqrt{2} > 0 \end{array}\right\}$$

Entonces hay que descartar la alternativa de poner un cero real.

Polo $|H(e^{j\theta})| = \left| \dfrac{\alpha(2\cos\theta - \sqrt{2})}{1 - p_0 e^{-j\theta}} \right|$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{\alpha(z-c)(z-c^*)}{z(z-p_0)}\Bigg|_{z=e^{j\theta}} \qquad H(-1) = \frac{\alpha(1+c)(1+c^*)}{(-1)(-1)(1+p_0)} = 1$$

$\theta = \pi$

$e^{j\pi} = -1$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1+p_0}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}$$

$$|H(e^{j\theta})|\Big|_{\theta=\frac{3\pi}{4}} = \frac{\alpha\left|\left(-\frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\right|}{\sqrt{1+p_0^2+p_0\sqrt{2}}} = 1/\sqrt{2} \Rightarrow 2\alpha\sqrt{2}\,\sqrt{2} = \sqrt{1+p_0^2+p_0\sqrt{2}}$$

$$\frac{4(1+p_0)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{1+p_0^2+p_0\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\cancel{16}\,8\,(1+p_0)^2}{\cancel{2}(3+2\sqrt{2})} = 1+p_0^2+p_0\sqrt{2}$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{8}(1+p_0^2+\sqrt{2}p_0) = 1+p_0^2+2p_0$$

$$(1+p_0^2)\left(1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right) + \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\sqrt{2} - 2\right)p_0 = 0$$

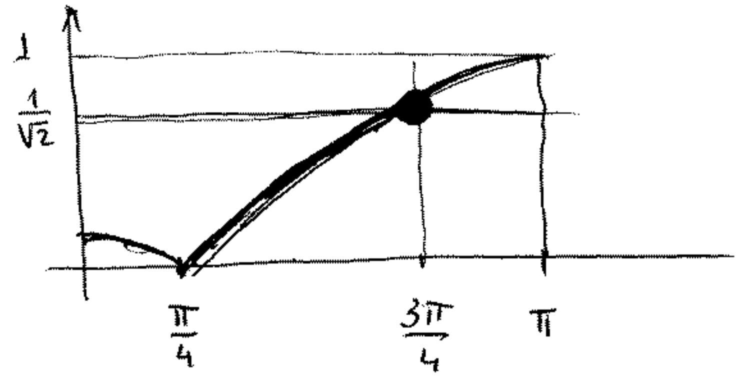
$$(1+p_0^2)\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{8}\right) + p_0\,\frac{12-3\sqrt{2}}{8} = 0$$

resolviendo se encuentra dos posibles soluciones para p_0:

$p_0^+ = 3,247$ → esto se descarta por ESTABILIDAD

$p_0^- = -0,323$ → $\boxed{p_0 \cong -0,323}$ y con este valor se encuentra $\underline{\alpha}$

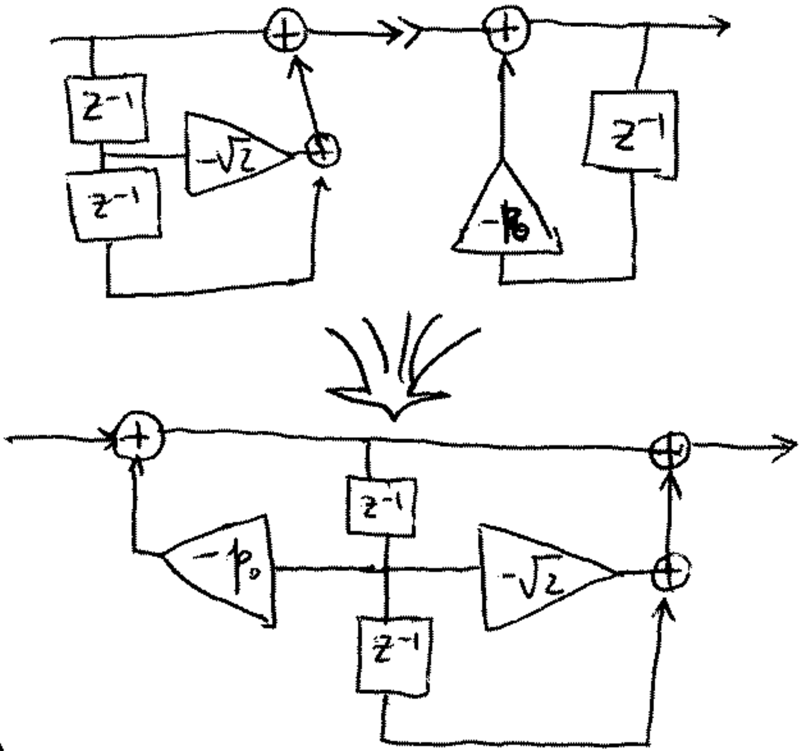
(b) los coeficientes se calculan en la parte anterior, el bosquejo:



$$\left| H_p(e^{j0})\big|_{\theta=0} \right| = \frac{|\alpha_p(2-\sqrt{2})|}{(1-p_0)}$$

(c)

$$H(z) = \frac{\alpha\,(1+z^{-2}-\sqrt{2}\,z^{-1})}{1-z^{-1}p_0} \longrightarrow \text{lo sintetizo}$$



"dando vuelta" invirtiendo el orden de los bloques se elimina un retardo.

(d) Se introducen ruidos no correlacionados entre sí, ruidos blancos de igual potencia P_ε (y media nula) después de cada multiplicador $\Rightarrow$ Si $h(n)$ es la resp. al impulso del filtro

$$r[n] = \varepsilon_1(n) + (\varepsilon_2 * h)(n)$$

$$P_r = P_{\varepsilon_1} + P_{\varepsilon_2}\sum_n |h(n)|^2$$