Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

4 de diciembre de 2004

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [15 pts.]

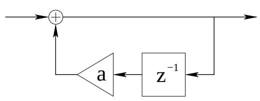
Al usar una representación de número con punto flotante:

(a) ¿En cuáles operaciones se producen errores? Explique detalladamente qué sucede en cada caso.

(b) Presentar el modelo completo de errores en las operaciones, e indicar hipótesis de validez.

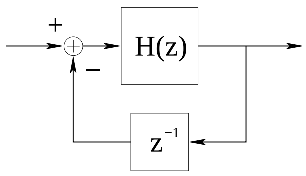
Problema 1 [10 pts.]

Sea el sistema de la figura:



(a) Encontrar la transferencia $H(z)$ y las condiciones para que sea estable.

Al sistema anterior se le agrega una realimentación externa negativa, resultando el esquema siguiente:



(b) Encontrar la nueva transferencia F(z).

(c) Encontrar condiciones para que el nuevo sistema sea estable.

(d) ¿Hay valores de a para los que el primer sistema es inestable y el segundo no?

(e) Las operaciones se hacen con una representación en punto fijo con redondeo y b bits de parte fraccionaria. Encontrar la potencia del ruido a la salida debida a errores en las operaciones.

Problema 2 [20 pts.]

Para eliminar el nivel de continua de una señal, se diseñará un filtro digital pasaaltos con las siguientes características:

- se utilizará un único elemento de retardo (filtro de orden 1)
- la ganancia será nula a frecuencia 0
- la transferencia del filtro será 1 a frecuencia π
- los coeficientes del filtro son números reales

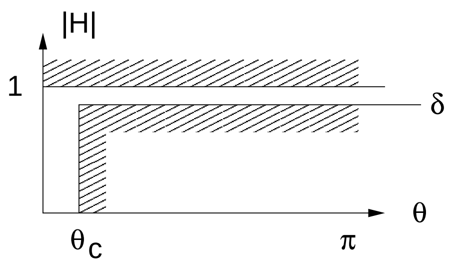
(a) Expresar la transferencia genérica $H(z)$ de los filtros digitales que cumplen con las condiciones anteriores. Se deberá indicar el rango de validez de los parámetros de modo de asegurar estabilidad.

(b) Dar un diagrama de bloques que implemente el filtro $H(z)$.

(c) Dibujar el diagrama de ceros y polos del filtro.

(d) Calcular y bosquejar la respuesta al escalón (u[n]) del filtro. Calcular el tiempo entre que se pone a funcionar el sistema, y que el nivel de continua a la salida haya sido eliminado en un 95 %.

La especificación del filtro requiere que cumpla con la siguiente máscara:



donde $\theta_c = \pi/10$, y $\delta = 0.95$.

(e) Hallar el filtro que cumpla con esta especificación, y que sea lo más rápido posible en eliminar la componente de continua. Evaluar el tiempo de eliminación del 95 % de la continua.

Problema 3 [15 pts.]

Sea $x[n]$ una secuencia periódica de período N. Sea $y[n] = Ax[n+m_0]$. Tanto A como m_o son desconocidos. Definimos a la secuencia $K[m]$ como

$$K[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[k-m]$$

(a) Probar que alcanza con tener N valores consecutivos de las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ para determinar completamente a $K[m]$. Deducir que $K[m]$ es periódica de período N.

(b) Probar que $K[m]$ alcanza su máximo en los valores de $m = kN + m_0$ con k entero.

(c) Proponer un procedimiento para calcular el retardo m_0 a partir de las secuencias finitas $x_1[n] = x[n]$ e $y_1[n] = y[n]$ con $n = 0 \dots N-1$.

(d) Se desea implementar el cálculo anterior usando la DFT. Proponer un procedimiento. ¿Puede haber una mejora en la eficiencia? Explicar.

Sugerencia: Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Sean u, $v \in R^N$ se cumple que

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1} u_k v_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} v_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} u_k^2}.$$

La igualdad se da si y sólo si $u = Av$ con A constante.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

Problema 1

(a) Llamemos v y w a la entrada y salida del sistema, respectivamente. Entonces,

$$w[n] = v[n] + awn - 1$$

$$W(z) = V(z) + az^{-1}W(z)$$

$$H(z) = \frac{W(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Como el sistema es causal, el sistema es estabe si todos los polos están adentro del círculo unidad. En este caso el sistema es estable si

$$|a| < 1$$

(b) Llamemos x y y a la entrada y salida, respectivamente, del nuevo sistema. Entonces,

$$y[n] = h[n] * (x[n] - y[n-1])$$

$$Y(z) = H(z)\Big(X(z) - z^{-1}Y(z)\Big)$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + z^{-1}H(z)}$$

Sustituyendo $H(z)$,

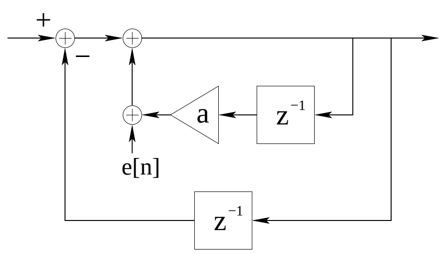
$$F(z) = \frac{1}{1 - (a-1)z^{-1}}$$

(c) Como antes, el polo debe estar adentro de del círculo unidad,

$$|a - 1| < 1$$

(d) Sí. Por ejemplo cuando $a = 1.5$, que el primer sistema es inestable y el segundo es estable, ya que $a - 1 = 0.5$.

(e) Al aplicar el modelo de ruido en operaciones con punto fijo obtenemos el siguiente sistema:



donde $e[n]$ es un proceso estocástico, con características de ruido blanco, media nula, independiente de la otras señales del sistema y con potencia $\frac{2^{-2b}}{12}$.
El sistema es lineal frente a sus dos entradas, por lo que la salida será:

$$x[n] * f[n] + e[n] * h_e[n].$$

Como el punto donde entra el ruido $e[n]$ es equivalente a la entrada, la transferencia desde e a la salida es igual a la del sistema total, es decir $h_e[n] = f[n]$. Como el ruido es independiente de $x[n]$, y el ruido es de media nula, el termino cruzado se anula. Por lo tanto la potencia del ruido a la salida es

$$P_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\theta})|^2 G_e(e^{j\theta}) d\theta = \frac{\sigma_e^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\theta})|^2 d\theta = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2$$

donde este último paso se justifica en la formula de Parseval. Cuando el sistema $F(z)$ es causal, antitransformando obtenemos:

$$P_r = \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} |(a-1)^n|^2 = \frac{2^{-2b}}{12}\frac{1}{1-(a-1)^2}.$$

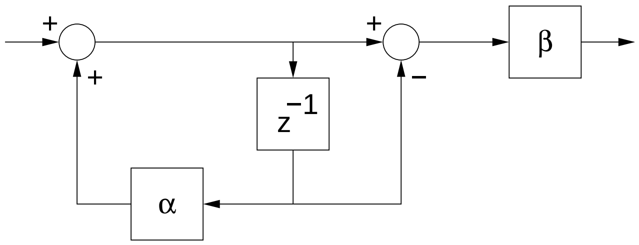
Problema 2

(a) El filtro de orden 1 tendrá a lo sumo un polo y un cero. Para tener ganancia 0 en continua, el cero deberá estar en $z = 1$. Por lo tanto, el filtro será de la forma:

$$H(z) = \beta\frac{z-1}{z-\alpha}$$

Donde α es el polo. Para asegurar estabilidad, se debe cumplir $|\alpha| < 1$.
Para ajustar la ganancia del filtro a frecuencia π, debe ser $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$.

(b)



(c) Un cero en 1, y un polo en α.

(d) La respuesta al escalón será:

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{1+\alpha}{2}\frac{z-1}{z-\alpha}\frac{z}{z-1} = \frac{1+\alpha}{2}\frac{z}{z-\alpha}$$

La cancelación cero polo deja la región de convergencia en $|z| > |\alpha|$, con lo que la salida será sumable en módulo.
La respuesta al escalón será entonces la antitransformada de $Y(z)$, que es una exponencial decreciente:

$$y[n] = \frac{1+\alpha}{2}u[n]\alpha^n$$

La respuesta al escalón es igual que la respuesta del sistema a la entrada 1, puesto a funcionar en $n = 0$ con condiciones iniciales nulas. Entonces el 95 % de la componente de continua de la entrada será elimianda cuando $y[n] = 0.05$:

$$\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n = 0.05$$

$$n = \frac{\log(10(\alpha+1))}{-\log(\alpha)}$$

En general, hay que tomar el entero superior a este resultado.

(e) Que sea lo más rápido posible significa elegir α lo menor posible. Es decir, elegir el parámetro α de modo que la transferencia, en módulo, pase por el punto $\{\theta_c, \delta\}$.
Para evitar raíces cuadradas, calculamos el módulo cuadrado del filtro:

$$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{(1+\alpha)^2}{4} \frac{e^{j\theta}-1}{e^{j\theta}-\alpha} \frac{e^{-j\theta}-1}{e^{-j\theta}-\alpha}$$

$$= \frac{(1+\alpha)^2}{4} \frac{2-2\cos(\theta)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\theta)} = \delta^2$$

Sustituyendo θ_c y δ, y resolviendo la cuadrática, queda como solución $\alpha = 0.90104$. El otro valor de α que resuelve la cuadrática resulta en un filtro inestable.
En este caso, el tiempo de respuesta del filtro es de 29 muestras.

Problema 3

(a) Definimos $x_1[n] = x[n]$ e $y_1[n] = y[n]$ con $n = 0 \ldots N-1$. $K[m]$ queda determinada como

$$K[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] y_1[((k-m))_N]$$

Como la secuencia $y[k]$ es periódica de periodo N se tiene que

$$K[m+N] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x[k]y[k-m-N] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x[k]y[k-m] = K[m]$$

(b) Planteando Cauchy-Schwarz para el caso en que se cumple la igualdad tenemos:

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} x[k]^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (Ax[k])^2} = \left|\sum_{k=0}^{N-1} x[k]Ax[k]\right| = \left|\sum_{k=0}^{N-1} x[k]Ax[k-m_0+m_0]\right| = A\,|K[m_0]|$$

Por otro lado:

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} x[k]^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} Ax[k]^2} \geq \left|\sum_{k=0}^{N-1} x[k]Ax[(k-m+m_0) mod N]\right| = A\,|K[m-m_0]|$$

Enconces:

$$A\,|K[m_0]| \geq A\,|K[m-m_0]|$$

Y como en la parte anterior vimos que K es periódica de período N, tomará este valor máximo para los valores de $Nk + m_0$:

$$K[Nk + m_0] = K[m_0]$$

xon k entero.

(c) Se calcula un período de la secuencia $K[m]$ como se muestra en la parte anterior. m_0 será el índice donde la secuencia alcance su valor máximo.

(d) Si definimos $x_3[n] = K[n]$ con $n = 0 \dots N-1$ vemos que se cumple que

$$x_3[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] y_1[((k-n))_N]$$

Que corresponde a realizar la convolución circular de N puntos de $x_1[n]$ con $x_2[-n]$. Por lo tanto se cumple que la DFT de $x_3[n]$ cumple que $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$, donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son las DFT's de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente. Por lo tanto una forma de realizar el cálculo en forma eficiente es:

- Calcular $X_1[k]$ y $X_2[k]$.
- Realizar la DFT inversa de $X_1[k]X_2[k]$. Esta será la secuencia $x_3[n]$.
- m_0 será el índice donde $x_3[n]$ sea máxima.