Muestreo y Procesamiento Digital

Segundo parcial

21 de diciembre del 2001

Indicaciones:

- El parcial tiene una duración máxima de 3 horas, y un puntaje total de **60** puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada ejercicio o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- En la primer hoja de cada ejercicio o pregunta se deberá indicar el número de hojas que corresponden a ese ejercicio o pregunta.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. A criterio del tribunal, se podrán **restar hasta dos puntos** de un parcial considerado ilegible.
- Al finalizar el parcial se deberá entregar el sobre con las hojas con la solución dentro de él. El sobre **no debe** rayarse, doblarse ni alterarse de ninguna forma.

Problema 1 [27 pts.]

Considere el sistema que se muestra en la Figura **??**,

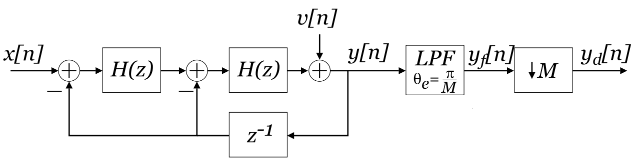


Figura 1: Ver Problema 1.

1. [4 pts.] Se definen las siguientes funciones de transferencia,

$$H_x(z) = \left.\frac{Y(z)}{X(z)}\right|_{V(z)=0} \qquad H_v(z) = \left.\frac{Y(z)}{V(z)}\right|_{X(z)=0}$$

   (a) Exprese $Y(z)$ en la forma $Y(z) = H_x(z)X(z) + H_v(z)V(z)$; donde $Y(z)$ es la transformada Z de $\{y[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

   (b) Encuentre $H_x(z)$ y $H_v(z)$ en términos de $H(z)$.

   Solución: $Y(z) = V(z) + H^2(z)X(z) - z^{-1}H^2(z)Y(z) - z^{-1}H(z)Y(z)$.
   Entonces

$$Y(z) = V(z)\frac{1}{1 + z^{-1}H(z) + z^{-1}H^2(z)} + X(z)\frac{H^2(z)}{1 + z^{-1}H(z) + z^{-1}H^2(z)}$$

   De modo que $H_x(z) = \frac{H^2(z)}{1+z^{-1}H(z)+z^{-1}H^2(z)}$ y $H_v(z) = \frac{1}{1+z^{-1}H(z)+z^{-1}H^2(z)}$.

$\boxed{\textbf{De ahora en más se deberá usar } H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}}$

2. (a) [1 pts.] Evaluar estas funciones de transferencia.
   (b) [1 pts.] Mostrar que $y[n] = x[n] + y_v[n]$ donde $y_v[n]$ es la salida debida a la entrada $v[n]$.
   (c) [2 pts.] ¿Cómo se expresa $y_v[n]$ en términos dela secuencia $\{v[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$?

   Solución: Observe que $1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = H^2(z)$,
   entonces
   $$H_v(z) = (1 - z^{-1})^2 \quad \text{y} \quad H_x(z) = 1$$
   Además se tiene que $Y_v(z) = (1 - 2z^{-1} + z^{-2})V(z)$, entonces $y_v[n] = v[n] - 2v[n-1] + v[n-2]$.

3. [2 pts.] Asuma que $v[n]$ es un proceso estacionario en sentido amplio, blanco, de media nula y potencia σ_v^2, y que además es no correlacionado con el proceso $x[n]$. Probar que la densidad espectral de potencia de $y_v[n]$ está dada por
$$G_{y_v}(\theta) = 16\,\sigma_v^2 \sin^4(\theta/2)$$

Solución: Se tiene $G_{y_v}(\theta) = \sigma_v^2 |H_v(e^{j\theta})|^2$. Entonces
$$G_{y_v}(\theta) = \sigma_v^2(1 - e^{-j\theta})^2(1 - e^{j\theta})^2 =$$
$$\sigma_v^2 \left(2je^{-j\theta/2}\sin(\theta/2)\right)^2 \left(-2je^{j\theta/2}\sin(\theta/2)\right)^2 =$$
$$16\sigma_v^2 \sin^4(\theta/2)$$
.

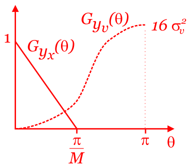
4. (a) [6 pts.] Sean M, un entero positivo, y $c[n]$, un proceso estocástico estacionario en sentido amplio. Probar que el proceso $c_d[n] = c[nM]$ es estacionario en sentido amplio y tiene densidad espectral de potencia
$$G_{c_d}(\theta) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G_c\left(\frac{\theta - 2\pi k}{M}\right)$$

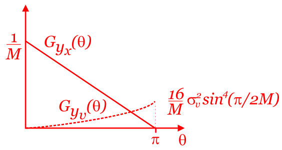
   Observación: *Puede resultar de utilidad recordar que para una señal determinística $z[n]$ tal que $Z(e^{j\theta}) = \mathcal{F}\{z[n]\}$, la transformada de Fourier de $z_M[n] = z[nM]$ para M entero positivo está dada por*
$$Z_M(e^{j\theta}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} Z\left(e^{j\frac{\theta-2\pi k}{M}}\right)$$

   Solución: Tenemos $c_d[n] = c[nM]$. Entonces para ver que este proceso es estacionario en sentido amplio, planteamos $\mathbb{E}(c_d[k]c_d[r])$ y vemos que depende solo de la diferencia entre k y r. Efectivamente, esa cantidad es igual a $\mathbb{E}(c[Mk]c[Mr])$ que no es otra cosa que $R_c[M(k-r)]$. Así que el proceso $c_d[n]$ es estacionario en sentido amplio (se puede asimismo verificar, en forma trivial, que la media de $c_d[n]$ es igual a la media de $c[n]$, que era una cantidad constante, pues este último proceso es estacionario en sentido amplio). Entonces $R_{c_d}[n] = R_c[nM]$. Ahora $R_c[n]$ es una función determinística, entonces para ella vale la relación que se da en la observación, de modo que
$$G_{c_d}(\theta) = \mathcal{F}\left(R_{c_d}[n]\right)(\theta) = \mathcal{F}\left(R_c[nM]\right)(\theta)$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{F}\left(R_c[n]\right)\left(\frac{\theta - 2\pi k}{M}\right)$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G_c\left(\frac{\theta - 2\pi k}{M}\right)$$

(b) [5 pts.] Asuma que la densidad espectral de potencia de $x[n]$ es igual a $G_x(\theta) = \Lambda(\frac{\theta}{\pi/M})$. Bosquejar las densidades espectrales de potencia $G_{y_x}(\theta)$ y $G_{y_v}(\theta)$ y de $G_{y_{d_x}}(\theta)$ y $G_{y_{d_v}}(\theta)$

Solución:





(c) [6 pts.]

i. Calcular SNR_y, la relación señal a ruido en la señal $y[n]$. De aquí en más, $x[n]$ es la señal deseada y todo lo demas es considerado ruido.

Observación: *Puede resultar útil la siguiente relación trigonométrica:*

$$\sin^4(\alpha) = \frac{3 + \cos 4\alpha - 4\,\cos 2\alpha}{8}$$

Solución: Sea P_x la potencia del proceso $x[n]$. Entonces $SNR_y = \frac{P_x}{\frac{16\,\sigma_v^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4(\theta/2)\,d\theta}$. Ahora la integral $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4(\theta/2)\,d\theta$ se evalúa fácilmente haciendo uso de la fórmula que se dió y resulta ser igual a $\frac{3}{8}2\pi$. De modo que

$$SNR_y = \frac{P_x}{6\sigma_v^2}$$

ii. Calcular SNR_{y_d}, la relación señal a ruido en la señal $y_d[n]$. Suponer que $M \gg 1$.

Solución: Ahora calculamos SNR_{y_d}. Por la presencia del filtro pasabajos, tenemos que $G_{y_{d\,v}}(\theta) = \frac{16\sigma_v^2}{M}\sin^4(\frac{\theta}{2M}) \simeq \frac{16\sigma_v^2}{M}\left(\frac{\theta}{2M}\right)^4 = \frac{\sigma_v^2}{M^5}\theta^4$. Entonces, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{y_{d\,v}}(\theta)\,d\theta \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma_v^2}{M^5}\theta^4 d\theta = \frac{\pi^4\sigma_v^2}{5M^5}$. Finalmente hallamos que

$$SNR_{y_d} = \frac{P_x}{\frac{\pi^4\sigma_v^2}{5M^5}}$$

iii. Calcular el cociente $\frac{SNR_{y_d}}{SNR_y}$ y comentar sobre su variación con M creciente.

Solución: Se encuentra que $\frac{SNR_{y_d}}{SNR_y} \simeq \frac{30}{\pi^4}M^5$. El cociente es creciente con M creciente.

Problema 2 [20 pts.]

Interesa recuperar una señal $x[n]$ a partir de una señal distorsionada $y[n] = x[n] * h[n]$. En teoría, $x[n]$ puede ser recuperada pasando $y[n]$ a través del filtro inverso

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \text{ con } H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

Asuma que el filtro que distorsiona es un FIR de respuesta al impulso

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - n_0]$$

donde n_0 es un entero positivo.

1. [5 pts.] Sea $\{h[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una secuencia discreta cuya tranformada $\mathcal{Z}$ es $H(z)$. Para N entero positivo se define $H_N(z) = H(z^N)$.

   Probar la siguiente propiedad general:

$$h_N[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h\,[l]\;\;\delta[n - lN]$$

   donde $h_N[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H_N(z)$

   Solución: Por un lado tenemos que

$$H_N(z) = \sum_n h_N[n] z^{-n}$$

   y por otro lado

$$H_N(z) = H(z^N) = \sum_n h[n] z^{-nN}$$

   Entonces tenemos que $\forall z$ se cumple $\sum_n h_N[n]z^{-n} = \sum_m h[m]z^{-mN}$, de donde se obtiene

$$h_N[n] = \begin{cases} h\left[\frac{n}{N}\right] \text{ si } n \text{ es múltiplo de } N \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

   De donde

$$h_N[n] = \sum_k h[k]\;\delta[n - kN]$$

2. [2 pts.] Determinar $h_i[n]$ *causal* basado en la definición de $H_i(z)$ dada más arriba.

   Solución: $H(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-n_0}$. Entonces el sistema inverso será $H_i(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-n_0}}$. Aplicando el resultado anterior con $N = n_0$, tenemos que $h_i[n]$ es la expansión con factor n_0 de la antitransformada causal de $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. La antitransformada es $u[n]\frac{1}{2^n}$. Entonces, $h_i[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\delta[n - kn_0]$.

3. [5 pts.] Se desea aproximar $h_i[n]$ por un FIR causal de $M \times n_0$ coeficientes usando truncado de la respuesta al impulso. Dar los coeficientes del filtro aproximante $h_i^T[n]$. Evaluar $h[n] * h_i^T[n]$ y comentar sobre cuán bien el filtro truncado aproxima al filtro inverso, y cómo la bondad de la aproximación varía con M.

   Solución: El filtro aproximante será $h_i^T[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2^k}\delta[n - kn_0]$. Hacemos la convolución, $\left(h * h_i^T\right)[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2^k}\delta[n - kn_0] * \left\{\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - n_0]\right\}$. Entonces

$$\left(h * h_i^T\right)[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \left\{\frac{1}{2^k}\delta[n - kn_0] - \frac{1}{2^{k+1}}\delta[n - (k+1)n_0]\right\}$$

   que se puede reconocer como una suma telescópica, entonces su resultado es

$$\left(h * h_i^T\right)[n] = \delta[n] - \frac{1}{2^M}\delta[n - Mn_0]$$

   Ahora, lo que nos interesa obtener es sólo la $\delta[n]$, de modo que el error que se comete es $e[n] = \frac{1}{2^M}\delta[n - Mn_0]$, un eco de amplitud decreciente con M y a distancia $M \times n_0$.

4. Ahora se considera el efecto del ruido de operaciones que afecta el funcionamiento del filtro FIR diseñado. Se supone que se trabaja con aritmética de **punto fijo** de b bits de parte fraccionaria, con redondeo.

   Observación: *recordar que las operaciones multiplicar por* 0 *y multiplicar por* 1 *no introducen error (ruido).*

   (a) [6 pts.] Se desea cuantificar el error global que se comete en la recuperación de $x[n]$ a partir de la señal de entrada $h[n] * x[n]$ como entrada al filtro $h_i^T[n]$. Para eso, si $y_r[n]$ es la señal de salida del filtro $h_i^T[n]$, entonces se considera el error cuadrático medio

   $$\varepsilon^2(M) = \mathbb{E}\left\{(x[n] - y_r[n])^2\right\}$$

   Probar que si P_x y P_e representan las potencias de $x[n]$ y del ruido introducido en cada uno de los multiplicadores respectivamente, entonces:

   $$\varepsilon^2(M) = \left(\frac{1}{4}\right)^M P_x + (M-1)P_e$$

   Se deben justificar todos los pasos cuidadosamente.

   Solución: Si el filtro ecualizador se implementa como un filtro transversal, a la salida de cada coeficiente (multiplicador) no nulo y no unitario tendremos un error que modelaremos como aditivo, blanco de media nula, no correlacionado con $x[n]$ ni con los ruidos introducidos en otros multiplicadores, y de potencia P_e (que se puede expresar en función del número de bits b de la parte fraccionaria si además decimos que cada ruido se distribuye uniformemente en un intervalo que depende de b, pero esto no viene al caso). La cantidad de estos coeficientes (no nulos y no unitarios) es $(M-1)$, y todas estas señales de error no correlacionadas entre sí ni con $x[n]$ aparecerán directamente sumadas a la salida, por lo cual la potencia de los errores será $(M-1)\,P_e$. Al tratarse de un sistema lineal se pueden separar los componentes de señal de los componentes de ruido: $y_r[n] = y_{r_x}[n] + y_{r_e}[n]$. Entonces, $(x[n] - y_{r_x}[n] - y_{r_e}[n])^2 = (x[n] - (x[n] - 2^{-M}x[n-Mn_0]) - y_{r_e}[n])^2 = (2^{-M}x[n-Mn_0] - y_{r_e}[n])^2$. Entonces, el valor esperado será $\varepsilon^2(M) = 2^{-2M}P_x + (M-1)P_e$, pues los términos cruzados se cancelan al tener media luna

   (b) [2 pts.] Ahora se desea minimizar el error global cometido. Si $\frac{(\ln 2)P_x}{P_e} = 2^7$ determinar el M para el cual se alcanza un mínimo de $\varepsilon^2(M)$.

   Solución: Derivando el error respecto de M, tenemos

   $$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial M} = P_x(-\ln 4)4^{-M} + P_e$$

   cantidad que debe ser nula en el mínimo. Entonces debe ser $\frac{P_x \ln 4}{P_e} = 4^M$. Entonces como $\ln 4 = 2\ln 2$, tenemos que $2^8 = 4^M$, o sea $M = 4$. Ahora verifiquemos que se produce un mínimo, para eso calculamos la derivada segunda y vemos que es positiva:

   $$\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial M^2} = P_x(\ln 4)^2 4^{-M} \;>\; 0\ \forall M$$

Pregunta 1 [6 pts.]

Sea un SLIT causal, BIBO estable con respuesta al impulso $h[n]$. Demostrar que los polos de la Transformada $\mathcal{Z}$ de $h[n]$, $H(z)$, están dentro del círculo unidad.

Solución: Un sistema estable tiene respuesta al impulso absolutamente sumable ($h[n] \in \mathcal{L}^1$). Esto implica que la respuesta frecuencial converge uniformemente, y por lo tanto el círculo unidad pertenece a la región de convergencia.

Si el sistema además es causal, se sabe que la región de convergencia es el anillo exterior. Entonces el anillo exterior incluye al círculo unidad. Como todas las singularidades (polos) están fuera de la región de convergencia, entonces éstas estarán dentro del círculo unidad.

Pregunta 2 [7 pts.]

1. [4 pts.] Las dos señales de la Figura **??**, $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ tienen período $N = 7$.

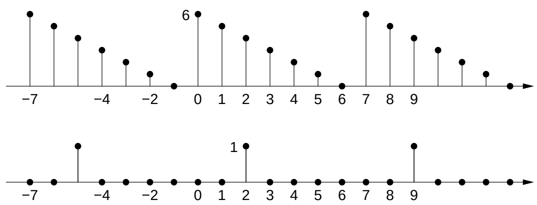


Figura 2: Ver Pregunta 2.

Hallar una secuencia $\tilde{y}[n]$ cuya serie discreta de Fourier sea el producto de las series discretas de $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$. Es decir, $\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$.

Solución: Si $\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$, entonces $\tilde{y}[n]$ será la convolución circular de $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$.

En este caso, la convolución circular es muy sencilla, ya que $\tilde{x}_2$ es un tren de impulsos retrasado 2 muestras. Por lo tanto, la convolución circular será $\tilde{x}_1[n-2]$.

2. [3 pts.] La señal $x_3[n]$ toma valores [0.3001 0.6366 0.9003 1 0.9003 0.6366 0.3001] para $0 \leq n < 7$, y vale 0 afuera de este rango. Similarmente, la señal $x_4[n]$ toma valores [1 0.9003 0.6366 0.3001 0.3001 0.6366 0.9003] para $0 \leq n < 7$, y vale 0 afuera de este rango.

¿Qué relación hay entre los módulos de la transformada discreta de Fourier de las dos señales? Justifique.

Solución: La transformada discreta es, por definición, el primer período de la serie discreta de la señal periodizada.

En este caso, $x_3[n]$ periodizada y $x_4[n]$ periodizada ($\tilde{x}_3[n]$ y $\tilde{x}_4[n]$ respectivamente) son la misma señal salvo un retardo de 3 muestras.

Por lo tanto, la serie discreta de cada una estará dada por: $\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_4[k]W_7^{3k}$.

La transformada discreta es el primer período de la serie discreta, y por lo tanto valdrá la misma relación.

Entonces, en módulo, las dos transformadas serán iguales, ya que $|W_7| = 1$.