

# Muestreo y Procesamiento Digital

## Primer parcial

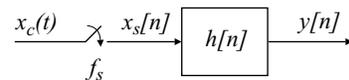
23 de octubre del 2001

### Indicaciones:

- El parcial tiene una duración máxima de 4 horas, y un puntaje máximo de **40** puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada ejercicio o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- En la primer hoja de cada ejercicio o pregunta se deberá indicar el número de hojas que corresponden a ese ejercicio o pregunta.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. A criterio del tribunal, se podrán **restar hasta dos puntos** de un parcial considerado ilegible.
- Al finalizar el parcial se deberá entregar el sobre con las hojas con la solución dentro de él. El sobre **no debe** rayarse, doblarse ni alterarse de ninguna forma.

### Problema 1 [15 pts.]

Sean  $x_s[n]$  una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo  $x_c(t)$ , muestreado con una frecuencia  $f_s = 1/T_s$ .

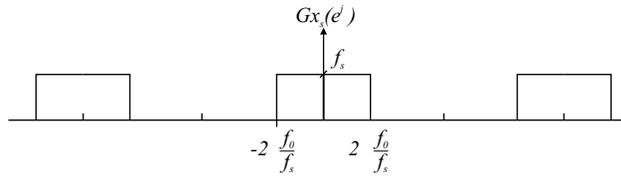


1. [2 pts.] Hallar una expresión para la autocorrelación de  $x_s$ ,  $R_{x_s}[n]$ , en función de la autocorrelación de  $x_c(t)$ ,  $R_{x_c}(\tau)$

*Solución:*  $R_{x_s}[n] = E\{x_s[m]x_s[m+n]\} = E\{x_c(mT_s)x_c((m+n)T_s)\} = R_{x_c}(nT_s)$

2. [4 pts.] Sea  $G_{x_c}(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$  la densidad espectral de  $x_c(t)$ . Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de  $x_s[n]$ ,  $G_{x_s}(e^{j\theta})$ . Bosquejar  $G_{x_s}(e^{j\theta})$  indicando las características (altura, frecuencia particulares, etc.)

*Solución:*  $R_{x_c}(\tau)$  es una señal de banda acotada en  $f_o$  ( $\omega_o = 2\pi f_o$ ). Según el teorema de muestreo, para no tener solapamiento debemos utilizar una frecuencia de muestreo  $f_s \geq 2f_o$ .



3. [4 pts.] Hallar  $R_{x_s}[n]$ , en las condiciones de la parte 2.

*Solución:*  $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$  donde  $\theta_o = 2\pi \frac{f_o}{f_s}$

$$\begin{aligned} R_{x_s}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_{x_s}(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta = \frac{f_s}{2\pi} \int_{-\theta_o}^{\theta_o} e^{jn\theta} d\theta \\ &= \frac{f_s}{2\pi} \frac{e^{jn\theta}}{jn} \Big|_{-\theta_o}^{\theta_o} = f_s \frac{e^{jn\theta_o} - e^{-jn\theta_o}}{j2\pi n} = f_s \frac{\text{sen}(\theta_o n)}{\pi n} \end{aligned}$$

Las muestras  $x_s[n]$  son filtradas con un filtro discreto de respuesta frecuencial  $H(e^{j\theta})$ .

4. [1 pts.] Dar una expresión para la densidad espectral de la salida del filtro,  $y[n]$ ,  $G_y(e^{j\theta})$ .

*Solución:*  $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta})$

5. [4 pts.] Hallar la autocorrelación de la señal de salida,  $R_y[n]$ , de los siguientes filtros en función de los parámetros del problema.

- (a) definido por la ecuación de recurrencia:  $y[n] = x_s[n] - a x_s[n-1]$

*Solución:*

$$\begin{aligned} R_y[n] &= E\{y[m]y[m+n]\} = E\{(x_s[m] - ax_s[m-1])(x_s[m+n] - ax_s[m+n-1])\} = \\ &= E\{x_s[m]x_s[m+n]\} - aE\{x_s[m-1]x_s[m+n]\} - aE\{x_s[m]x_s[m+n-1]\} + a^2E\{x_s[m-1]x_s[m+n-1]\} \\ &= (1 + a^2)R_{x_s}[n] - a(R_{x_s}[n+1] + R_{x_s}[n-1]) \\ R_y[n] &= (1 + a^2)f_s \frac{\text{sen}(\theta_o n)}{\pi n} - a f_s \left( \frac{\text{sen}(\theta_o(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{\text{sen}(\theta_o(n-1))}{\pi(n-1)} \right) \end{aligned}$$

- (b) de transferencia  $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$ , con  $\theta_o f_s = \omega_0$ .

*Solución:*  $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$  con lo que  $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$  y tiene la misma forma que la densidad espectral de potencia con que trabajamos en la parte 3. Si repetimos la cuentas obtenemos:

$$R_y[n] = f_s \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta_o}{2} n\right)}{\pi n}$$

## Problema 2 [15 pts.]

1. [5 pts.] Enuncie y demuestre una condición necesaria y suficiente para la estabilidad BIBO de **Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo**.

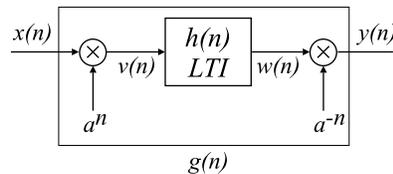
*Solución:* Consultar el teórico.

2. [5 pts.] Demuestre la siguiente propiedad: *Un sistema con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$  es Lineal e Invariante en el Tiempo si y sólo si existe  $g[n]$  tal que para todo entero  $n$ :*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] x[n - k]$$

*Solución:* Consultar el teórico.

3. [5 pts.] En el sistema que se muestra en la figura,  $|a| > 1$  y  $h[n]$  es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo, estable y causal. Denotamos como sistema  $\mathcal{G}$  al que tiene entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$ .



- (a) ¿Es el sistema  $\mathcal{G}$  Lineal e Invariante en el Tiempo? Si la respuesta es afirmativa, encuentre su respuesta impulsiva  $g[n]$ . Si la respuesta es negativa, explique por qué.

*Solución:* Para hacer esta parte usamos la parte 2. de este mismo problema. De la figura se observa que

$$\begin{aligned} y[n] &= a^{-n} w[n] = a^{-n} \sum_k h[k] v[n - k] = a^{-n} \sum_k h[k] a^{(n-k)} x[n - k] \\ &= a^{-n} a^n \sum_k h[k] a^{-k} x[n - k] \\ &= \sum_k (h[k] a^{-k}) x[n - k] \end{aligned}$$

de modo que encontré una  $g[n]$  dada por  $g[n] = h[n] a^{-n}$  tal que me permite escribir la relación entrada salida en forma de convolución, por lo tanto, en virtud de la parte 2. del ejercicio, el sistema debe ser un SLIT y  $g[n]$  su respuesta al impulso.

- (b) ¿Es el sistema  $\mathcal{G}$  BIBO estable? Debe justificar detalladamente su respuesta.

*Solución:* Para ver si es estable BIBO puedo usar la parte 1. ya que tengo un SLIT. Entonces debo mirar  $\sum_k |g[k]| = \sum_k |a^{-k} h[k]|$ . Como  $h$  es un SLIT causal, solo debo sumar para  $k \geq 0$ . La suma queda:  $\sum_{k=0}^{\infty} |a|^{-k} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty$  ya que por hipótesis  $|a| > 1$  y  $h[n]$  es estable. Esto demuestra que el sistema es BIBO estable.

### Problema 3 [10 pts.]

Se considera el sistema  $\mathcal{S}$  definido por la recurrencia ( $x[n]$  es la entrada e  $y[n]$  es la salida):

$$y[n] = \frac{1}{2} \left\{ y[n - 1] + \frac{x[n]}{y[n - 1]} \right\} \quad \forall n \in \mathcal{Z}$$

y por la condición inicial  $y[-1] = 1$ .

1. [4 pts.] Encontrar su respuesta al impulso.

*Solución:* Se encuentra que  $y[0] = 1$  usando la recurrencia y la condición inicial. Si  $x[n] = \delta[n]$  entonces  $x[n] = 0$  si  $|n| \geq 1$ . Entonces la recurrencia arroja que  $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1]$  con  $|n| \geq 1$ . Separando para  $n > 0$  y  $n < 0$ , se encuentra que  $y[n] = 2^{-n}$  e  $y[n] = 2^{-n-1}$  respectivamente. De modo que, en forma compacta,  $y[n] = 2^{-n}u[n] + 2^{-n-1}u[-n-1]$ .

2. [4 pts.] Para el sistema  $\mathcal{S}$ :

- (a) estudiar Linealidad.

*Solución:* Uso lo siguiente: “sistemas lineales dan respuesta nula a entrada nula”. La salida del sistema a la entrada  $x[n] = 0$  es  $y[n] = 2^{-n}$  para  $n \geq 0$ , o sea que no es nula, por lo tanto **NO ES LINEAL**.

- (b) estudiar Causalidad.

*Solución:* El sistema es causal ya que la salida en el instante  $n$  no depende de entradas posteriores.

- (c) estudiar Invariancia Temporal.

*Solución:* Tomemos  $x[n] = \delta[n]$  cuya respuesta encontramos en la parte 1. Si el sistema fuera invariante en el tiempo  $T\{x[n-K]\}$  sería igual a  $h[n-K]$ . Pero sabemos que  $y[-1] = 1 \neq 2^{-(-1-K)-1} = h[n-K]$  si  $K \neq 0$ . Entonces el sistema no es invariante en el tiempo.

- (d) mostrar que el sistema NO es BIBO estable y justificar.

*Solución:* El que aparezca  $y[n-1]$  en el denominador es sospechoso y nos hace preguntar que pasa si  $y[n-1] = 0$  para algún  $n$ . No hay dudas de que lo que va pasar es que el la respuesta en el siguiente instante va a ser  $\infty$ . Así que la clave está en encontrar alguna entrada acotada para la cual la salida sea nula en algún instante  $n_0$ , entonces  $|y[n_0+1]| = \infty$ . Por ejemplo si tomamos  $x[n] = -1 \quad \forall n \in \mathcal{Z}$ , vemos que  $y[0] = \frac{1}{2} \left\{ y[-1] + \frac{(-1)}{y[-1]} \right\} = 0$  !!. Entonces  $y[1]$  es infinita. Por lo tanto el sistema **NO ES BIBO ESTABLE**.

Otra forma de demostrarlo es notando que la respuesta al impulso calculada en la parte 1 tiende a  $\infty$  cuando  $n \rightarrow -\infty$ , por lo tanto no es acotada. Como  $\delta[n]$  es acotada, el sistema no es BIBO estable.

3. [2 pts.] Este sistema recursivo se utiliza en muchas calculadoras para computar la raíz cuadrada de un número positivo  $A$ . Para ello se excita al sistema  $\mathcal{S}$  con la entrada  $x_A[n] = Au[n]$  y se estima el valor de  $\sqrt{A}$  como el valor de la respuesta del sistema a esta entrada,  $y_A[n]$  luego de un número grande de iteraciones.

Asumiendo que  $y_A[n]$  converge, probar que  $y_A[n] \rightarrow \sqrt{A}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

*Solución:* Asumiendo que hay convergencia, llamándole  $y$  al límite, entonces  $y[n] \xrightarrow{n \uparrow \infty} y$ , entonces también  $y[n-1] \xrightarrow{n \uparrow \infty} y$ , de modo que mirando la recurrencia, sacamos que  $y = \frac{1}{2}(y + \frac{A}{y})$ , o sea  $y^2 = A \Rightarrow y = \sqrt{A}$ . Sobre este último paso, no hay dudas de que si  $A > 0$  entonces  $y_A[n] > 0$  si  $n \geq 0$ .